Костадин Тренчевски
Анета Гацовска
Надица Ивановска

МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ

ЗА III ГОДИНА НА ЧЕТИРИГОДИШНОТО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

ЕКОНОМСКО - ПРАВНА И ТРГОВСКА СТРУКА

ЕКОНОМСКИ ТЕХНИЧАР

Рецензенти:

д-р Гордана Билбиловска, професор при Економски факултет, УКИМ, Скопје

Елизабета Лазовска - Тасиќ, професор при СУГС „Марија Кири - Склодовска”, Скопје

Виолета Несторовска, професор СЕПУГС „Васил Антевски - Дрен”, Скопје

П р е д г о в о р

Учебникот **МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ** за трета година на четиригодишното стручно образование е пишуван според Наставната програма за истоимениот задолжителен предмет за трета година на четиригодишното стручно образование. Наменет е пред се́, според наставниот план за учениците од економско правната и трговската струка во образовниот профил економски техничар. Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на наставата. Учебникот се состои од девет тематски целини. Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, која претставува продолжување на работата на часот и таа е највисок степен на самостојна работа на ученикот. На крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање.

Во првата наставна тема ,,**Проста каматна сметка**'' има за цел да го оспособи ученикот да применува простата каматна сметка, терминската сметка, дисконтната сметка и влоговна сметка. Посебен акцент е даден на усвојувањето на поим кредитна сметка, жиро-сметка и трансакциска сметка.

Совладувањето на материјалот изложен во втората наставна тема ,,**Благородни метали, валути и девизи**'' дава можност за стекнување на знаења од областа на благородните метали, како и техника за пресметување на финост, маса на благородни метали во легури и маса на легури. Освен тоа ученикот се запознава со поимите валута и девизи, при што посебен акцент е ставен на решавање на задачи во врска со купопродажба на валути и купопродажба на девизи.

Треттата наставна тема ,,**Експоненцијални и логаритамски равенки**'' е насочена кон воведување на поимите степен со реален показател и логаритам. Ова претставува појдовна основа за развивање на техники за решавање на одделни видови експоненцијални и логаритамски равенки.

Со совладување на материјалот кој се однесува на четвртата наставна тема ,,**Тригонометриски функции од остар агол**'' ученикот ќе се стекне со основни знаења од областа на тригонометријата, што подразбира усвојување на основните тригонометриски функции синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол, како и нивна примена во геометријата и практиката пошироко.

Во петтата тема ,,**Права во рамнина**'' учениците се упатуваат на усвојување на методите на аналитичката геометрија во рамнина. Специјално, ќе се запознаат со формулите за: пресметување на растојание меѓу две точки, делење на отсечка во даден однос и пресметување на плоштина на триаголник. Во продолжение ќе се запознаат со разните видови равенки на права. На крајот од изложениот материјал ќе научат да решаваат метрички проблеми, во смисла на пресметување на агол мегу две прави и пресметување на растојание од точка до права

При реализирање на програма низ овој учебник наставникот може лесно да настојува на самостојна работа од страна на учениците.

Посебна благодарност должиме на рецензентите на овој учебник, чии сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците од економско – правната струка да се запознаат со содржини кои ќе им бидат од корист во нивното понатамошно професионално усовршување.

Февруари, 2010 Авторите

С О Д Р Ж И Н А

1. ПРОСТА КАМАТНА СМЕТКА

1. 1. Пресметување на проста камата

1.1.1. Основни поими

Секојдневното живеење е пропратено со вложување на средства во банка, на трансакциски сметки, штедни книшки, кредитни картички. Платата и надоместоците на платата, пензиите, заштедите, најчесто се парични средства кои и се отстапени на банката на определен временски период, со можност да се подигнат кога за тоа има потреба. Во меѓувреме, банката ги користи средствата, а за тоа на вложувачот банката му пресметува камата. Исто така, често пати граѓаните имаат потреба да позајмат парични средства од банката, на определен период, но заради користењето на таквата услуга, должни се на банката да ѝ платат одреден процент од износот, односно камата.

Кредитни односи се воспоставуваат помеѓу должникот и доверителот. Во основа на ваквите односи е каматата. **Каматата** претставува процентен износ од вложената сума, односно од позајмената сума, како парична надокнада која должникот му ја плаќа на доверителот, односно како цена за користење на позајмената сума.

Доколку подигаме заем (кредит), тогаш банката е **доверител**, а корисникот на заемот е **должникот** кој за користење на средствата на банката ѝ плаќа соодветна камата. Доколку пак вложуваме средства во банка, банката е корисник на средствата и на доверителот му исплаќа камата.

Каматата (интересот) се пресметува во облик на процентен износ на секои 100 парични единици од позајмениот износ, но се разликува од обичниот процент. Причината е во тоа што при пресметувањето на каматата предвид се зема не само процентот, туку и времето на кое средствата се позајмени.

Наједноставни примери за пресметување на камата се: штедните влогови, кредитирањето на граѓаните и претпријатијата, потрошувачките кредити, како и дебитните и кредитните картички.

Доколку каматата се пресметува само на капиталот вложен на иста основна сума во секој период на пресметување на каматата, тогаш се нарекува **проста камата**.

Пресметувањето на простата камата, како и останатите величини од кои таа зависи, се нарекува **проста каматна сметка**. Четирите основни величини кои се јавуваат при проста каматна стапка се:

- основна сума (основен капитал, главница) K
- пресметана камата I
- каматна стапка (во проценти) p, инаку еднаква на камата за 100 денари за единица време
- времето за кое се пресметува каматата t.

Каматната стапка најчесто се задава за една година, иако може да се користи и каматна стапка дадена за период помал од една година: полугодие (семестар), тримесечје (квартал), месец и слично.

Времето за кое се пресметува каматата може да биде зададено во години, месеци или денови, но по договор може да се користи дека годината има 365 дена, а месеците се бројат календарски, но може, заради поедноставно пресметување, годината да ја сметаме со 360 дена, а месеците со 30 дена.

Каматата може да се пресметува на почеток од периодот или на крај на периодот, но за тоа ќе зборуваме понатаму.

Често пати, ќе го користиме и поимот акумулирана вредност, која е основната сума зголемена за пресметаната камата $(K+I)$.

1.1.2. Основни врски помеѓу величините при пресметување на проста камата

Во следниве примери ќе ги илустрираме врските помеѓу величините при пресметување на проста камата.

1. Колкава камата ќе донесе капитал од 34500 денари, вложени во банка за време од 4 години, со каматна стапка 8%?

За време од една година, за капиталот од 34500 денари, пресметаната камата изнесува

$$\frac{8}{100}\cdot 34500 = 2760 \text{ денари.}$$

Бидејќи каматата се пресметува на основниот капитал, износот на каматата за втората година повторно е 2760 денари, а исто толку изнесува и каматата за секоја наредна година. Оттука, за време од 4 години, пресметаната камата е четири пати поголема од онаа пресметана за една година. Тогаш вкупната камата е

$$I = \frac{8}{100}\cdot 34500\cdot 4 = 11040 \text{ денари.} \ \blacklozenge$$

Ако последната пресметка ја запишеме со општите ознаки, пресметаната камата е

$$I = \frac{Kp}{100}$$

за време од една година, односно

$$I = \frac{Kpt}{100}$$

за време од t години.

Притоа, простата камата, за време зададено во години, може да се претстави во основна пропорција, која гласи:

$$K : I = 100 : p\cdot t$$

од која лесно може да се изведат и другите величини во простата каматна сметка.

2. Која вложена сума ќе донесе камата од 9600 денари, за време од 8 години, со каматна стапка од 5%?

Имајќи ја предвид пропорцијата која ги поврзува основните величини, основната сума се пресметува по формулата

$$K=\frac{100I}{pt}.$$

Во конкретниот пример, вложената сума изнесува

$$K=\frac{100\cdot 9600}{5\cdot 8}=24000 \text{ денари.} ♦$$

На сличен начин се добиваат и формулите за временскиот период на кој се пресметува простата камата, како и каматната стапка. Ќе ги изведиме соодветните формули низ примери.

3. Колку години треба да биде вложен основен капитал од 54000 денари, за банката да исплати камата од 6480 денари, со каматна стапка од 6%?

Од основната пропорција добиваме

$$t=\frac{100I}{Kp}.$$

Тогаш

$$t=\frac{100\cdot 6480}{54000\cdot 6}=2 \text{ години.}$$

4. Пресметај ја каматната стапка со која за долг од 58000 денари се пресметува камата од 8700 денари, за три години.

Непозната величина е каматната стапка p, која може да се пресмета согласно пропорцијата според формулата

$$p=\frac{100I}{Kt}.$$

Во конкретниот случај

$$p=\frac{100\cdot 8700}{58000\cdot 3}=5\%. ♦$$

Во досегашните примери, времето за кое се пресметуваше каматата беше изразено во години, но најчесто периодот на вкаматување не е зададен со цел број години. Во тој случај, најлесно е деновите или месеците да се изразат како дел од годината, за да може да се користат претходно изведените врски меѓу величините во простата каматна сметка. Така, месецот претставува $\frac{1}{12}$ од годината, а денот $\frac{1}{360}$

или $\frac{1}{365}$ од годината. Ако времето е зададено во месеци, за пресметаната камата важи

$$I = \frac{Kp}{100} \cdot \frac{t}{12},$$

имајќи предвид дека t-месеци претставуваат $\frac{t}{12}$ од годината.

Основна пропорција за време дадено во месеци гласи:

$K : I = 1200 : pt$.

Доколку времето е зададено во денови, ја користиме формулата

$$I = \frac{Kpt}{36000}$$

или

$$I = \frac{Kpt}{36500},$$

зависно од договорот дали годината ја сметаме календарски со 365 денови (пишуваме $(k, 365)$) или со временска матрица $(30, 360)$ односно 12 месеци по 30 дена. Имено, времето t зададено во денови, претставува $\frac{t}{365}$, односно $\frac{t}{360}$ делови од годината. Соодветните основни пропорции за пресметување на останатите величини се

$K : I = 36500 : pt$

или

$K : I = 36000 : pt$.

Забелешка. Се користи и ознака $(k, 360)$, кога месеците се бројат календарски, а годината со 360 денови.

5. Колкава камата ќе биде исплатена за основен капитал од 240000 денари за 8 месеци, со каматна стапка од 6% ?

Од зададените услови во задачата имаме $K = 240000$, $t = 8$ месеци, $p = 6\%$. Тогаш

$$I = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 8}{1200} = 9600 \text{ денари.}$$

6. Со која каматна стапка, основен капитал од 1620000 денари, ќе донесе камата од 21304 денари за период од 60 дена? Времето го мериме календарски.

Познатите величини се: $K = 1620000$, $I = 21304$ и $t = 60$ дена. Тогаш $I = \frac{Kpt}{36500}$, односно

$$p=\frac{36500\cdot I}{Kt}=\frac{36500\cdot 21304}{1620000\cdot 60}=8\% \,.\blacklozenge$$

7. Колкава е вложената сума во банка на период од 23 мај до 16 септември оваа година, ако пресметаната камата е 4576 денари, со каматна стапка од 4%? Времето го мериме календарски $(k,365)$.

Прво треба да се пребројат деновите и тоа, доколку го броиме првиот ден од периодот не го земаме предвид последниот, односно ако не го пресметуваме првиот, тогаш го пресметуваме последниот ден од периодот. Во секој случај, не се бројат и првиот и последниот ден.

Во нашиот случај, ќе сметаме дека прв ден за вкаматување е 24 мај, а тогаш имаме вкупно 8 дена од месец мај, 30 дена од јуни, па 31 дена од јули и август, а бидејќи го броиме последниот ден имаме 16 дена од месец септември, односно вкупно $t=8+30+31+31+16=116$ дена. Согласно формулата, за непознатата величина K важи

$$K=\frac{36500I}{pt}=\frac{36500\cdot 4576}{4\cdot 116}=360000 \text{ денари.}$$

Значи, вложена е сума од 360000 денари на 23 мај. ♦

8. Победникот на турнирот во пинг-понг, ја вложил освоената сума од 125000 денари, во две различни банки. Првата банка пресметува камата со 7%, а втората со 5%. По една година, пресметаната камата од двете банки е вкупно 7850 денари. Колкави износи се вложени во двете банки поединечно?

Позната е вложената сума $K=125000$, која е збир на два поединечни влога $K_1=x$ и $K_2=125000-x$. Каматните стапки се $p_1=7\%$, $p_2=5\%$, со вкупна камата $I=I_1+I_2=7850$. Тогаш според условите, можеме да поставиме равенка

$$I=\frac{K_1p_1t_1}{100}+\frac{K_2p_2t_2}{100},$$

каде што $t_1=t_2=1$ година. Оттука,

$$7850=\frac{7x}{100}+\frac{5(125000-x)}{100},$$

односно

$$785000=5\cdot 125000+2x,$$

од каде што следува $K_1=x=80000$ денари и $K_2=45000$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Колкава камата се пресметува на 25000 денари со каматна стапка 15% за време од:

а) 5 години, б) 3 месеци, в) 25 дена по $(30,360)$ и $(k,365)$.

2. Колку години треба да биде вложена сума K, за да со годишна проста каматна стапка од 5%, пресметаната камата изнесува колку и вложената сума? (Забелешка. $K = I$)

3. Пресметај ја каматната стапка со која за долг од 34500 денари, пресметана е камата од 6900 денари, за 4 години?

4. За која вложена сума се пресметува камата од 3540 денари, при каматна стапка од 6% за:

а) 4 години, б) 8 месеци.

5*. Во банка се вложени две различни основни суми кои се разликуваат за 12000 денари. Поголемата сума е вложена на една година, со 4% каматна стапка, а помалата сума на 10 месеци, со 6% каматна стапка. Пресметај ја вкупната вложена сума, доколку пресметаните камати, за двете суми поединечно се еднакви.

6*. Пресметај колкава вкупна камата, со каматна стапка од $6{,}5\%$, ќе донесат следниве суми: 38000 денари вложени на период $31.01-30.06$, 72600 денари вложени на период $8.03-30.06$ и 18900 денари вложени на период $1.05-30.06$, во истата календарска година?

1. 2. Каматна сметка над сто и под сто

Често, кога се зборува за долговите и пресметаните камати, како и вложувањето и штедните камати, не се разгледуваат поединечните величини од пропорциите за проста каматна сметка, туку од практичен аспект се зборува за основната сума зголемена за пресметаната камата или пак сумата намалена за пресметаната камата.

Доколку е позната основната сума зголемена за каматата $K+I$, тогаш зборуваме за **проста каматна сметка над сто**, а ја применуваме за одредување на K и I. Доколку пак, користејќи ја основната сума намалена за пресметаната камата, $K-I$, ги одредуваме K и I, зборуваме за **проста каматна сметка под сто**. И овде, при пресметувањето временскиот период на вкаматување може да е зададен во години, месеци или денови.

Основната пропорција за простата каматна сметка е зададена со $K : I = 100 : pt$. Изразувајќи ја пресметаната камата $I = \dfrac{Kpt}{100}$ и додавајќи ја на основната сума, за акумулираната сума добиваме

$$K + I = K + \frac{Kpt}{100} = K\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

Тогаш

$$\frac{K+I}{K}=1+\frac{pt}{100}=\frac{100+pt}{100},$$

од каде што може да запишеме нова пропорција во облик:

$$(K+I):(100+pt)=K:100 \qquad (1)$$

Исто така, ако основната пропорција ја преуредиме во облик $K:100=I:pt$, тогаш добиваме уште една пропорција која ја поврзува акумулираната сума со другите величини во простата каматна сметка

$$(K+I):(100+pt)=I:pt. \qquad (2)$$

Ако на сличен начин ја побараме намалената сума $K-I$, добиваме

$$K-I=K-\frac{Kpt}{100}=K\left(1-\frac{pt}{100}\right)=K\frac{100-pt}{100}.$$

Оттука, може да ја запишеме пропорцијата

$$(K-I):(100-pt)=K:100 \qquad (3)$$

и повторно со замена на односот $K:100$ од основната пропорција, добиваме

$$(K-I):(100-pt)=I:pt. \qquad (4)$$

Заради сличноста на пропорциите, може да се поврзат во облик

$$(K\pm I):(100\pm pt)=K:100$$

и

$$(K\pm I):(100\pm pt)=I:pt.$$

Истите овие пропорции, може да се изведат и со примена на познати својства за размер од збирот или разликата на левите членови на размерот и збирот или разликата на десните членови, кој е еднаков на размерот на првите членови на левиот и десниот размер, а воедно е еднаков и на размерот на вторите членови на левиот и десниот размер од истата пропорција.

Од новоизведените пропорции, може да се изведат формули за пресметување на основната сума и каматата во сметките над и под сто

$$K=\frac{(K\pm I)\cdot 100}{100\pm pt} \text{ и } I=\frac{(K\pm I)\cdot pt}{100\pm pt}.$$

1. Должник на доверителот му враќа долг од 57120 денари, износ во кој е вклучена и пресметаната камата со каматна стапка 6%, за период од две години. Колкав е долгот, а колкава каматата?

Познат е износот $K+I=57120$ денари. Тогаш основната сума согласно формулата е $K=\frac{(K+I)\cdot 100}{100+pt}$, каде $p=6\%$, $t=2$. Основната сума изнесува

$$K=\frac{57120\cdot 100}{100+6\cdot 2}=\frac{5712000}{112}=51000 \text{ денари.}$$

Значи, главницата на долгот е 51000 денари, а на камата отпаѓаат $57120-51000=6120$ денари. ♦

2. По одбивањето на 8% камата за 6 месеци, банката наплатила 52800 денари. Колкав е долгот, а колкава каматата?

Имајќи предвид дека каматата I е одбиена на почеток, тоа значи дека основната сума е веќе намалена за каматата, па должникот треба да врати уште $K-I$ денари на банката, колку што подигнал. Тогаш $K-I=52800$ денари, $t=6$ месеци, $p=8\%$. Постојат два начини да се пресмета основната сума, да се пресмета времето во години, односно $t=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, или пак да се изведат соодветни формули за сметката под сто и над сто, во случаите кога времето се пресметува во месеци или денови. Директно, од познатата формула добиваме

$$K=\frac{(K-I)\cdot 100}{100-pt}=\frac{52800\cdot 100}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5280000}{96}=55000 \text{ денари},$$

а каматата

$$I=\frac{(K-I)\cdot pt}{100-pt}=\frac{52800\cdot 8\cdot\frac{1}{2}}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{211200}{96}=2200 \text{ денари}$$

(или $I=K-(K-I)=55000-52800=2200$ денари). ♦

Доколку користиме готови пропорции за пресметување, кога времето е зададено во месеци, од $K:I=1200:pt$ добиваме

$$(K\pm I):(1200\pm pt)=K:1200$$

и

$$(K\pm I):(1200\pm pt)=I:pt.$$

Од $K:I=36500:pt$ или $K:I=36000:pt$, користејќи ги својствата на пропорциите добиваме

$$(K\pm I):(36500\pm pt)=K:36500$$

$$(K\pm I):(36500\pm pt)=I:pt$$

и соодветно

$$(K\pm I):(36000\pm pt)=K:36000$$

$$(K\pm I):(36000\pm pt)=I:pt,$$

за случаите кога користиме временски матрици $(k,365)$ и $(30,360)$, за период на вкаматување изразен во денови.

3. Лице подигнало кредит и по 9 месеци, заедно со 11% камата, вратило 541250 денари. Колку изнесува кредитот, а колку пресметаната камата?

Користејќи ја пропорцијата за акумулираната сума $K+I$, кога времето е изразено во месеци, $(K+I):(1200+pt)=K:1200$, за основната сума добиваме

$$K=\frac{(K+I)\cdot 1200}{1200+pt}=\frac{541250\cdot 1200}{1200+11\cdot 9}=500000 \text{ денари},$$

а за пресметаната камата важи

$$I=(K+I)-K=541250-500000=41250 \text{ денари. } \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Објасни што е каматна сметка над сто, а што каматна сметка под сто.

2. По одбивањето на 30% камата за 200 дена, за колку треба да се врати заемот, ако должникот добил 60000. Колку изнесува каматата, а колку вкупно средства треба да се вратат? Користи временска матрица $(30,360)$.

3. Лице склучило договор за тримесечен кредит, со 20% каматна стапка, при што банката ја задржала каматата и исплатила 33440 денари. На колкава сума е склучен договорот за кредит и колкава е пресметаната камата? Користи временска матрица $(30,360)$.

4. На лице треба да му се исплатат 35000, односно 50000 денари, за 3, односно за 5 години. Каматната стапка е 5% годишно. Колкав вкупен износ треба да се вложи за да по вкаматувањето се добијат потребните суми?

5*. Заедно со $3{,}2\%$ камата за периодот $10.08-30.09$, $(30,360)$, должникот вратил 33900 денари. Да се пресмета долгот и каматата.

6. Заедно со $12{,}5\%$ камата, за две години, должникот вратил 325500 денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата?

7. По одбивање на 9% камата за време од 25.01 до 31.08, примени се 10000 денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата, ако временската матрица е $(K,365)$?

1. 3. Терминска сметка

Кога должникот има повеќе суми за враќање, со различни износи, со различни рокови за плаќање и различни каматни стапки, се поставува прашањето дали е можно и како да се исплатат долговите наеднаш, а ниту една страна, ниту доверителот ниту должникот, да не бидат оштетени. Прашањето може да се разгледува од аспект на тоа кој е средниот рок на враќање на долговите, која би била средната каматна стапка, колкав е должничкиот износ во моментот кога се враќа долгот. Во принцип тоа значи дека збирот на каматата на поединечните делови треба да е еднаков на каматата пресметана за вкупниот долг за средно време, со средна каматна стапка. Постапката на утврдување на средниот рок и средната стапка, се нарекува **терминска сметка** и претставува една примена на простата каматна стапка. **Среден рок** се нарекува времето за кое може да се исплатат наеднаш повеќе долговни суми, наместо истите суми да се исплаќаат во различни рокови. **Рок на салдо на долгот** е рок во кој може да се исплати разликата помеѓу долгот и побарувањата, во ситуација во која покрај тоа што има долг, лицето е и доверител за некои други должници.

1.3.1. Пресметување на среден рок

Нека обврските на должникот се долгови со износи K_1, K_2, ..., K_n, со каматни стапки p_1, p_2, ..., p_n, соодветно, при што долговите доспеваат за временски периоди t_1, t_2, ..., t_n.

Во формулите, времето t_k, $k = 1,2,...,n$, може да биде во кои било мерни единици, но банките најчесто ги изразуваат во денови.

Должникот сака да ги подмири сите долгови наеднаш, во среден рок t_s и со средна каматна стапка p_s. За поедноставни пресметки, нека времето е зададено во години. Вкупните обврски на должникот на име на камати се:

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + ... + \frac{K_n p_n t_n}{100}.$$

Овој износ треба да е еднаков на сумата на каматите пресметани за поединечните долгови, но со средна каматна стапка, во среден рок на исплата на долгот.

$$\frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + ... + \frac{K_n p_s t_s}{100}.$$

Во оваа ситуација нема оштетени, основните суми на долговите се еднакви, но и пресметаните камати збирно (акумулативно), исто така се еднакви.

Значи,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + ... + \frac{K_n p_n t_n}{100} = \frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + ... + \frac{K_n p_s t_s}{100},$$

односно

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n = p_s t_s \left(K_1 + K_2 + ... + K_n\right).$$

Оттука, доколку знаеме со која средна каматна стапка ќе вкаматуваме, може да го пресметаме средниот рок за враќање на долгот, односно го добиваме времето за враќање на вкупниот долг,

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n}{p_s \left(K_1 + K_2 + ... + K_n\right)}.$$

Средната каматна стапка, се пресметува кога сумите, стапките и времето се различни

$$p_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}.$$

Да ја разгледаме пресметаната камата за поединечните долгови и вкупниот долг, на еден ист временски период. За таа цел, во претходната формула ставаме

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t_s$$

и добиваме

$$p_s = \frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}.$$

Ќе ја замениме пресметаната средна каматна стапка во формулата за средниот рок и добиваме

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{\frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)},$$

односно

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}.$$

Често пати, некои од величините во пресметките се еднакви. Така:

- ако се еднакви основните суми $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = K$, за средниот рок и средната каматна стапка добиваме:

$$t_s = \frac{K\left(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n\right)}{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)} = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

и

$$p_s = \frac{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)}{nK} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n};$$

- ако се еднакви каматните стапки $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, за средниот рок добиваме

$$t_s = \frac{p\left(K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n\right)}{p\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)} = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n},$$

а за средната каматна стапка имаме $p_s = p$;

- ако се еднакви и основните суми и каматните стапки, тогаш $p_s = p$ и

$$t_s = \frac{K\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right)}{nK} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}.$$

Рокот на плаќање (датумот на плаќање), најчесто се определува со додавање на пресметаниот среден рок на првото време на доспевање. Тогаш и пресметувањето на времињата на доспевање на поединечните долгови се врши споредено со првото време на доспевање.

Ако равенката за изедначување на збирот на одделните камати и каматата пресметана за средниот рок, ја запишеме во случај кога времето е зададено во денови, добиваме

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500}+\frac{K_2 p_2 t_2}{36500}+...+\frac{K_n p_n t_n}{36500}=\frac{K_1 p_s t_s}{36500}+\frac{K_2 p_s t_s}{36500}+...+\frac{K_n p_s t_s}{36500},$$

односно повторно се добива равенството

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n = p_s t_s \left(K_1 + K_2 + ... + K_n\right).$$

Ова покажува дека пресметувањата се вршат според истите формули, независно како го мериме времето, во години, месеци или денови, но секако сите времиња на доспевање теба да се изразени во иста мерна единица.

1. Должник треба да плати 30000 денари во четири еднакви рати и тоа првата исплата по 30 денови, втората по 60 денови, третата по 90 денови и последната рата по 120 денови, од сега. За колку денови може да се исплати целиот долг наеднаш, ако каматната стапка е 8%?

Бидејќи исплатата е во еднакви рати, сумите K_1, K_2, K_3 и K_4 се еднакви, каматната стапка е еднаква за сите исплати $p=8\%$, а за времето за исплата поединечно важи $t_1=30$, $t_2=60$, $t_3=90$ и $t_4=120$. Го пресметуваме средниот рок за овој специјален случај

$$t_s=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}=\frac{30+60+90+120}{4}=75 \text{ дена.}$$

Ова значи дека долгот од 30000 денари може да се врати целосно за 75 дена од сега, со камата 8%.♦

Датумот на плаќање во однос на кој се брои времето за пресметките во терминската сметка, се нарекува **епоха**. За епоха не мора да се избере првото време на доспевање. Ќе разгледаме пример во кој пресметките се вршат во однос на две различни епохи.

2. Должник треба да го исплати својот долг од 60000 денари, со каматна стапка од 16% во четири еднакви рати и тоа: првата на 15.02, втората на 7.03, третата на 5.04 и четвртата на 1.05, истата година. На кој датум должникот може да го исплати целиот долг, ако

а) епохата е 15.02; б) епохата е 7.03?

Во случајот кога времето почнуваме да го мериме од 15.02 (случајот под а)), времето за доспевање на првата рата е $t_1=0$. За втората рата, времето на доспевање е периодот од 15.02 до 7.03 (не броејќи го 15.02, но вклучувајќи го 7.03) е $t_2=20$ дена. Соодветно, $t_3=49$ (13 дена од февруари, 31 ден од март и 5 дена од април) и $t_4=75$ (од 15.02 до 1.05). Со оглед на тоа дека основните суми и каматната стапка се еднакви, за средниот рок добиваме

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{0 + 20 + 49 + 75}{4} = 36 \text{ дена.}$$

Датумот на доспевање на исплатата на целиот долг е 36 дена од денот кога започнува броењето, односно од 15.02, а тоа е 23.03.

Доколку за епоха го избереме денот 7.03 (случајот под б)), тогаш првото доспевање го броиме наназад од 7.03 до 15.02, односно сега $t_2 = 0$ а $t_1 = -20$. Натаму, $t_3 = 29$ (од 7.03 до 5.04) и $t_3 = 55$ (од 7.03 до 1.05). Средниот рок е

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{-20 + 0 + 29 + 55}{4} = 16 \text{ дена,}$$

што не доведува до датумот 23.03.♦

Ова покажува дека без разлика на избраната епоха и различните средни рокови, датумот за исплата на долгот е истиот.

3. Трговско друштво треба да плати 100000 денари на четири еднакви рати и тоа:

- првата рата за 100 дена од сега со камата 3%;
- втората рата за 150 дена, со камата 4%;
- третите 25000 денари, за 200 дена, со камата 6%;
- четвртата рата за 300 дена, со камата 7%.

По колку дена и со која средна каматна стапка, може да се исплатат сите четири долгови наеднаш, а да нема оштетени страни?

Задачата наједноставно ќе ја решиме кога ќе ги распоредиме вредностите во табела, во која воедно и сумирањето е поедноставно.

	K_i - суми	t_i - дена	p_i - стапки	$p_i \cdot t_i$
1	25000	100	3	300
2	25000	150	4	600
3	25000	200	6	1200
4	25000	300	7	2100
Збир	100000		20	4200

Средната стапка е $p_s = \dfrac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = \dfrac{3 + 4 + 6 + 7}{4} = 15\%$ и

$$t_s = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_4 t_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{300 + 600 + 1200 + 2100}{20} = \frac{4200}{20} = 210 \text{ дена.}$$

Вкупниот долг од 100000 денари треба да се врати за точно 210 дена, со камата 5%, односно за 210 дена трговското друштво треба да врати

$$100000 + \frac{100000 \cdot 5 \cdot 210}{36000} = 102917 \text{ денари. } \blacklozenge$$

4. Трговец, од истата банка, зел три кредити, но сите под различни услови. Неговиот долг се состои во враќање на

- 20000 денари на 7.05 со 4% камата;
- 40000 денари на 6.06 со 5% камата;
- 50000 денари на 5.08 со 6% камата.

На кој датум и со која средна каматна стапка, трговецот може да ги врати сите три суми наеднаш, без да биде оштетен?

Ако за почетен датум го избереме 7.05, тогаш $t_1 = 0$, $t_2 = 30$ дена (од 7.05 до 6.06), $t_3 = 90$ дена (од 7.05 до 5.08). Во табела ги внесуваме податоците и производите кои се јавуваат во формулите за пресметување на средниот рок.

	K_i - суми	t_i - дена	p_i - стапки	$K_i p_i$	$K_i p_i t_i$
1	20000	0	4	80000	
2	40000	30	5	200000	6000000
3	50000	90	6	300000	27000000
Збир	110000			580000	33000000

Имаме $p_s = \dfrac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3}{K_1 + K_2 + .K_3} = \dfrac{580000}{110000} = 5{,}27\%$ и

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + K_3 p_3 t_3}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3} = \frac{33000000}{580000} \approx 57 \text{ дена.}$$

Вкупниот долг може наеднаш да се врати со камата 5,27% за 57 дена, поточно на 3.07.♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е терминска сметка?

2. Кое време се нарекува среден рок?

3. Кој рок се нарекува рок на салдо на долгот?

4. Претпријатие должи неколку сметки за електрична енергија, па склучило договор за плаќање на пет еднакви рати по 80000 денари, со каматна стапка 9% и тоа: прва рата по 30 денови, втора по 50 денови, трета рата по 80 денови, четврта по 100 денови и последната петта рата по 115 денови. Во кој интервал може да се исплати целиот долг наеднаш?

5. Должник треба да плати 300000 денари, и тоа 25% веднаш, 10% по два месеци, 35% по седум месеци и останатите 30% по десет месеци. По колку време може да се платат сите суми наеднаш?

6. Долг од 1800000 денари треба да се врати во четири еднакви рати со 20% каматна стапка и тоа:

- прва рата на 15.03;
- втора рата на 21.04;
- трета рата на 10.05;
- четврта рата на 30.06.

На која дата целиот долг може да се исплати наеднаш, ако стартната дата е:

а) 15.03; б) 21.04.

7. Трговец на својот добавувач треба да му исплати три достави на стока, и тоа:

- 60000 денари со 6% на 3.04;
- 80000 денари со 6% на 24.04;
- 100000 денари со 6% на 26.05.

На кој датум трговецот треба да ги исплати набавките за да ниту добавувачот, ниту трговецот на се оштетени?

8. Должник треба да плати 80000 денари на 3.03, 30000 на 8.04, 60000 денари на 18.05, 30000 денари на 23.07, сите со 10% каматна стапка. На кој датум може да се исплати целиот долг?

9. Трговец треба да ги исплати профактурите од својот набавувач и тоа на износи од по 45000 денари, со каматна стапка 6% на 10.04, 28.04, 20.05 и 30.05. На кој ден трговецот може наеднаш да го исплати долгот?

1. 4. Пресметување на рок на салдо на долгот

Во овој дел ќе дадеме одговор на прашањето кога должникот може да ги регулира сите свои обврски, ако истовремено и должи и побарува. Таквиот временски рок се нарекува рок на салдо на долгот.

Нека $K_1, K_2, ..., K_n$ се обврските на должникот по $t_1, t_2, ..., t_n$ денови, со каматни стапки $p_1, p_2, ..., p_n$. Нека неговите побарувања се $P_1, P_2, ..., P_m$, со рокови по $t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0$ денови, со каматни стапки $p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0$. Идејата е да се утврди рокот на салдото t_s, каматната стапка (средна) p_s и салдото на долгот S, ако знаеме дека збирот на каматите на долгот е еднаков на збирот на каматите на побарувањата и каматата на салдото. Притоа, под претпоставка дека долговите се поголеми од побарувањата, $K_1 + K_2 + ... + K_n > P_1 + P_2 + ... + P_m$, салдото на долгот S е сумата која треба да се доплати за да се покрие долгот, односно

$S = (K_1 + K_2 + ... + K_n) - (P_1 + P_2 + ... + P_m)$.

Вкупната камата за долговите изнесува

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500}.$$

Вкупната камата за побарувањата е

$$\frac{P_1 p_1^0 t_1^0}{36500} + \frac{P_2 p_2^0 t_2^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m^0 t_m^0}{36500},$$

а пресметаната камата за салдото на долгот е $\frac{S p_s t_s}{36500}$.

Тогаш,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500} = \frac{P_1 p_1^0 t_1^0}{36500} + \frac{P_2 p_2^0 t_2^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m^0 t_m^0}{36500} + \frac{S p_s t_s}{36500}.$$

Без разлика во која мерна единица е изразено времето, равенството од кое ќе го одредиме рокот на салдото на долгот е

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = P_1 p_1^0 t_1^0 + P_2 p_2^0 t_2^0 + \ldots + P_m p_m^0 t_m^0 + S p_s t_s,$$

односно

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1^0 t_1^0 + P_2 p_2^0 t_2^0 + \ldots + P_m p_m^0 t_m^0\right)}{S p_s}.$$

Специјално, доколку каматните стапки се еднакви и за долговите и за побарувањата, $p_1 = \ldots = p_n = p_1^0 = \ldots = p_m^0 = p_s$, добиваме

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n - \left(P_1 t_1^0 + P_2 t_2^0 + \ldots + P_m t_m^0\right)}{S}.$$

1. Фирмата Поларино должи 5000 денари за 40 денови, 6000 денари за 50 денови, 8000 денари за 80 денови, а побарува 3000 денари за 30 денови и 10000 денари за 90 денови. По колку денови може да се плати остатокот од долгот? Каматната стапка е еднаква на целиот период.

Ќе ги внесеме податоците во табела, слично како при определување на средниот рок на исплата, но и за долговите и за побарувањата:

Долг				Побарување			
	K_i	t_i	$K_i t_i$		P_j	t_j^0	$P_j t_j^0$
1	5000	40	200000	1	3000	30	90000
2	6000	50	300000	2	10000	90	900000
3	8000	80	640000				
Збир	19000		1140000		13000		990000

Салдото на долгот е

$$S = (K_1 + K_2 + K_3) - (P_1 + P_2) = 19000 - 13000 = 6000 \text{ денари.}$$

Рокот на салдото е

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + K_3 t_3 - \left(P_1 t_1^{\,0} + P_2 t_2^{\,0}\right)}{S} = \frac{1140000 - 990000}{6000} = 25 \text{ денови.}$$

Целосна исплата на долгот треба да се направи со доплата на 6000 денари, вкаматени за истата каматна стапка, за 25 денови од сега. ♦

Забелешка. До сега претпоставувавме дека долгот е поголем од побарувањата. Но, може да се случи и долгот да е помал од побарувањата, ситуација во која салдото на долгот, при наведените равенства, ќе добие негативен знак, што ќе значи дека ќе му останат на должникот со пресметаната камата.

Задачи за самостојна работа

1. Која е идејата за воведување на поимот рок на салдо на долгот?

2. Претпријатие должи 75000 денари за три месеци, 40000 денари за шест месеци и 80000 денари за осум месеци. Во исто време побарува 55000 денари за седум месеци и 30000 денари за девет месеци. Во кој рок може да се плати целиот долг?

3. Претпријатие должи 80000 денари на 5.04, 150000 денари на 20.05, 275000 денари на 30.06, а побарува 130000 денари на 17.03 и 90000 денари на 5.08. На која дата може да се плати салдото на долгот, ако епохата е 5.04?

4. Должник треба да врати 1000 денари на 4.03, 2000 денари на 25.04 и 3000 денари на 15.05. Во исто време побарува на 1500 денари на 17.04 и 1000 денари на 1.09. На кој датум може да се плати салдото на долгот и колку изнесува вкупниот износ кој должникот ќе го уплати на доверителот?

а) епоха 4.03;   б) епоха 17.02.

5. Трговец треба да исплати долгови кон својот добавувач и тоа по 45000 денари, со каматна стапка 6%, на 10.04, 28.04, 20.05 и 30.05. Во исто време побарува по 30000 денари на 15.04 и 25.05. На кој ден може да се исплати салдото на долгот?

1. 5. Поим за дисконтна сметка и дисконтни пресметувања

Во условите на стопанисување се појавуваат случаи кога одреден износ на пари, генериран врз основа на одредени финансиски инструменти (обврзници, чекови, меници и сл.) за детерминиран временски период, се исплаќаат предвремено (пред рокот на доспевање на инструментот). Карактеристично за овој вид на случаи е пресметката на делот на каматата, за кој треба да се намали крајната сума која се должи, познат како дисконт. Имено, при предвремена исплата на дадено номинално задолжување, кое треба да се плати на определен датум во иднина, сумата за која се намалува номиналното задолжување во моментот пред рокот на доспевање на долгот, се нарекува **дисконт**.

Постапката на конверзија на едно задолжување кое треба да се плати на определена дата во задолжување кое предвремено се плаќа на одредена дата (детерминирање на сегашната вредност на идните готовински текови) се нарекува дисконтирање (есконтирање).

При реализирањето на дисконтните пресметувања се користат следниве параметри:

N=	номинална вредност на која гласи финансискиот инструмент.
t,n,n=	дисконтен (есконтен) рок, кој е еднаков на времето изразено во број на денови - t, месеци - m, години - n, од денот на дисконтирање на инструментот, до денот на доспевање на инструментите. Деновите на месеците се сметаат календарски, така што не се пресметува денот кога е поднесен инструментот на есконт, а се пресметува денот на доспевање на инструментот.
D =	дисконт (есконт), кој е еднаков на сумата за која се намалува номиналната вредност на финансискиот инструмент.
p =	каматна стапка (дисконтна стапка) по која е пресметан дисконтот.
E =	реална (ефективна) сума со која се отплаќа номиналното задолжение во моментот на предвремено плаќање.

Бидејќи, пресметувањето на дисконтот, се врши на два начина, постојат два вида на дисконти:

- комерцијален (банкарски, трговски) дисконт - *Dk,* кај кој за основа на пресметувањето на дисконтот се зема номиналната вредност, а ефективната вредност се добива како разлика на номиналната вредност и дисконтот и

- рационален (математички) дисконт - *Dr*, кај кој номиналната вредност се добива како збир на ефективната вредност и соодветната камата, која се пресметува за ефективната вредност.

При дисконтирањето, банката врз основа на номиналната вредност пресметува определена провизија и дополнително наплатува и манипулативни трошоци (провизијата и манипулативните трошоци се одземаат од пресметаната ефективна вредност).

1.5.1. Карактеристики на меница

Меницата (bill of exchange) е писмена исправа издадена во пропишана форма во која едно лице му издава налог на друго лице во определено време и на определено место да му ја исплати означената сума пари во меницата на лицето означено на самата меница кому му е даден тој налог. Имено, меницата претставува хартија од вредност по наредба и нејзиниот емитент (трасант) дава безусловна наредба на друго лице (трасат), да се исплати одреден паричен износ на корисникот на исправата (ремитент), кој е наведен на меницата или на самиот трасант:

- трасант (drawer) е налогодавач или издавач на меница кој се назначува на лицето на меницата (емитенти на меницата се банки и патнички агенции кои издаваат одделни видови меници);
- трасат (drawee) е оној кој врши исплата по меницата од трасантовото покритие што се наоѓа кај него;
- ремитент (payee) е физичко или правно лице назначено во исправата на кое му се исплатува износот наведен во меницата, односно корисник на меницата и
- имател на меницата е лице кое ја поседува меницата на законит начин.

Меницата како хартија од вредност ги има следниве улоги:

- меницата е средство за кредит (или средство за обезбедување);
- меницата е средство за плаќање и
- меницата е средство за есконт.

Во зависност од карактеристиките и улогата, постојат повеќе видови меници: трасирана меница, сопствена меница, бланко меница, стоковна меница, деловна меница, цилкуларна меница, трасирана - влечена меница, сопствена - влечена меница, комисиона меница и кредитна меница.

Основни видови на меници се трасираната и сопствената меница. Бидејќи меницата е формално - правна работа и се составува во пропишана писмена форма која содржи извесен број на елементи кои се карактеристични за **трасираната меница**. Според Законот за меница и соодветните Женевски конвенции од 1930 година, трасираната меница треба да ги содржи следниве суштествени елементи:

- ознака дека е меница, отпечатена на самиот меничен слог, на македонски јазик, со кирилско писмо;
- трансат (емитенот на меницата);
- име, односно назив и седиште на трасатот;
- име на ремитент (корисник на правото од меницата);
- безусловна наредба да се плати одредена сума пари од покритието на трасантот;
- време на пристигнувањето;

- место каде што треба да се изврши плакањето;
- ден и место на издавање и
- потпис на трасантот.

Сопствената меница претставува безусловно ветување преземено од трасантот како трасат дека ќе се исплати одреден паричен износ на ремитентот кој е наведен на меницата. Сопствената меница ги содржи следниве елементи:

- ознака дека меницата е отпечатена на самиот меничен слог, на македонски јазик со кирилско писмо;
- безусловно ветување дека одредена сума на пари ќе се плати;
- време на пристигнувањето;
- место каде што треба да се изврши плаќањето;
- име на ремитентот;
- ден и место на издавање и
- потпис на трасантот.

Менични работи се правни дејствија и работи кои можат да се вршат со меницата: издавање на меница, индосирање на меница, акцептирање на меница, цесија на меница, авалирање на меница, откупување на меница, амортизација, отповикување, протест на меница и др.

Карактеристични менични начела што наоѓаат примена во менично правните работи се: писменост, инкорпорација, фиксност на меничната обврска, менична строгост, менична солидарност, менична самостојност и менична непосреденост.

Начелото на писменост (формалност) доаѓа до израз поради тоа што меницата е строго формална исправа. Меницата мора да се издаде во писмена, со закон пропишана форма, заради полесно докажување на постоењето на менично - правните односи, како и заради непречено одвивање на менично - правниот промет. Во писмената исправа на меницата треба да бидат содржани сите суштествени елементи и менично - правни дејства, како, на пример, изјавата за акцептирање, авалирање, индосирање и друго. Потребно е да се потенцира дека во поново време начелото на формалност стана поеластично во правниот промет, како и во поновите прописи за менично право, во контекст на усвојувањето на т.н. теорија на пропуштање (омисија), односно издавање на бланко меница.

Начелото за инкорпорација се состои во тоа што правата и обврските од меницата се тесно поврзани со поседувањето на меничната исправа. Ниедно лице не може да ги оствари правата од меницата доколку не ја има и самата меница. Начелото на инкорпорација истовремено содржи две права (право од меница и право на меница):

- право од меница - според својот карактер е облигационо право и се состои во тоа што имателот на меницата е овластен да бара од меничниот должник извршување на определена менична обврска и

- право на меница - според својот карактер е вистинско право кое се изразува преку тоа што постои претпоставка дека имателот на меницата е нејзин законски сопственик и има право да бара извршување на обврската од меничниот должник само додека меничната исправа е во негова сопственост.

Според **начелото на фиксна менична обврска**, може да се побарува или да се должи врз основа на меница, што недвосмислено се гледа од самото менично писмено. Меничната обврска се проценува врз основа на она што е наведено во меницата, а не врз основа на други доказни средства. Во менична обврска се стапува тогаш кога на меничното писмено ќе се стави потпис и се впишат меничните изјави.

Со **начелото на менична строгост** се обезбедува брз и непречен менично - правен промет и лесно докажување на меничните обврски. Меницата спаѓа во инструменти кои најмногу ги обезбедуваат доверителите и претставува строга исправа во однос спрема доверителите во таа смисла тој мора да ги оствари своите права од меницата според определените прецизни правни правила, што му овозможува на должникот сигурна положба.

Начело на менична солидарност се состои во тоа што сите лица што ја потпишале меницата (трасантот - емитентот, акцептантот, авалистот и индосант) солидарно му одговараат на имателот на меницата за нејзино исплатување, без разлика на нивните меѓусебни односи.

Начело на менична непосреденост се состои во тоа што секој од меничните должници (потписници на меницата) му одговара непосредно на меничниот доверител. Поради тоа, доверителот е овластен непосредно да му се обрати на секој должник и од него да бара исплата на меничната сума, без разлика на рангот што го има меничниот должник во меницата.

Начелото на менична самостојност се состои во тоа што секој меничен должник, со ставање на свој исправен потпис на меничното писмено, создава самостојна менична обврска, независно од обврските на одделните потписници на меницата.

1.5.2. Дисконтирање (есконтирање) на меницата

Износот, означен на меницата претставува номинална вредност на меницата или менична сума. Меницата може да се исплати:

- на денот на доспевање на меницата;

- по рокот на доспевање, кога покрај номиналната вредност се плаќа и соодветна камата на задоцнувањето и

- пред рокот на доспевање (продажба на меницата пред рокот на доспевање).

Дисконтирањето (есконтирање) на меницата претставува финансиска трансакција кога деловен ентитет врши доставување на недоспеана меница до банката при што генерира принос (номинална вредност на меницата намалена за дадена камата и провизии). Всушност, дисконтирање на меницата претставува предвремена продажба или предвремено купување на меницата пред доспевањето при што се плаќа номиналната вредност на меницата (дисконтирана вредност на меницата), намалена за каматата која се пресметува од денот на дисконтирање до денот на доспевање. Деловните ентитети кои имаат меници за продадени стоки или услуги и кои решиле да ги есконтираат кај банката, ги поднесуваат мениците кај одговорните лица во банката. Доколку деловните ентитети достават повеќе меници во еден ден, се поднесува и спецификација на мениците.

Во случај кога дисконтирањето се врши по денот надостасувањето на меницата, тогаш каматата се собира од номиналната вредност.

Каматната стапка по која се пресметува оваа камата е дисконтна стапка, додека добиената камата е дисконт, а сметката во која се врши дисконтирањето претставува дисконтна сметка.

Дисконтирање на меницата - постојат повеќе начини за пресметување на дисконт. Наједноставната пресметка на комерцијален дисконтот е следнава:

$$D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}$$

Пресметката на рационалниот дисконт е следнава:

$$Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}$$

Банките дисконтирањето го вршат користејќи го банкарскиот дисконт и ефективната сума која ја добива сопственикот на меницата се пресметува според следнава равенка:

$$E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)$$

1. Меница со номинална вредност од \$ 1 000 е поднесена до банка на ден 10. 09. 2009 година. Дисконтната стапка изнесува 7%, додека рокот на доспевање е на ден 30.09.2009 година. Врз основа на дадените параметри да се пресмета комерцијалниот и рационалниот дисконт, како и разликата помеѓу нив.

$N = \$\ 1\ 000$
$t = 20$ дена
$p = 7\%$

$$Dk = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100} = \$3{,}89 \qquad Dr = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100 + 7 \cdot 20} = \$3{,}87$$

$$Dk - Dr = \$\,3{,}89 - \$\,3{,}87 = \$\,0{,}02 \ \blacklozenge$$

2. Деловниот ентитет X е сопственик на меница врз основа на продажба на транспортно средство во износ од $ 100 000, која треба да ја наплати на 01.10.2009. Меѓутоа, деловниот ентитет има потреба од финансиски средства и одлучува да ја поднесе меницата на есконтирање во дадена банка на ден 06.09.2009, со дисконтна стапка од 8%. За услугата за дисконтирање, банката наплатува провизија во износ од 0,5% и $100 манипулативни трошоци.

N = $ 100 000
p = 8%
t = 25 дена

Пресметка на ефективна сума:

$$E = N \cdot (1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100)}) = \$100000 \cdot (1 - \frac{8 \cdot 25}{360 \cdot 100}) = \$99444{,}44$$

Врз основа на ефективната сума, дисконтот изнесува:

D = $ 100 000–$ 99 444,44 = $ 555,56

или дисконт пресметан со равенка за комерцијален дисконт:

$$Dk = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100} = \frac{100000 \cdot 8 \cdot 25}{36000} = \$555{,}56$$

Износот на провизијата врз основа на услугата за дисконтирање изнесува:

$$\$99444{,}44 \frac{0{,}5}{100} = \$497.$$

Со вкалкулирање и на манипулативните трошоци ($ 100), деловниот ентитет ќе добие ефективна сума во износ од:

$ 99 444,44 – $ 497 – $ 100 = $ 98 847,44. ♦

3. Компанијата А на ден 01.05. 2009 година, доставила три меници со еднакви номинални вредности од $ 20 000, на есконтирање до банката, при што мениците имаат различен рок на доспевање. Да се пресмета износот на парични средства што ги исплати банката на компанијата на ден 01.05, ако дисконтната стапка е 6%, провизијата е 1% а манипулативните трошоци се $ 20.

Меницата е дисконтирана на ден 01.05.2010

	Износ (N)	Рок на доспевање	Денови	*Dk*
Меница А	$ 20 000	01.04.2009	30	$ 100
Меница Б	$ 20 000	20.03.2009	41	$ 137
Меница Ц	$ 20 000	15.03.2009	46	$ 153
	$ 60 000			$\sum Dk$ = $ 390

p = 6 %

$\sum Dk$ = $ 390

провизија = 1%

манипулативни трошоци = $ 20

ефективна сума = $\sum N - \sum Dk$ = 60 000 – 390 = $ 59 610

\- (провизија = 59 610 x 0,01 = 596,1)

= 59 013,9

\- (20)

= 58 993,9

Банката на 01.05.2010 ќе ѝ исплати на компанијата А износ од 58 993,9 денари за дисконтираните три еднакви меници со различен рок на доспевање. ♦

Кога се врши купување на меници, вкупните трошоци се додаваат на дисконтираната вредност на меницата.

4. Одредено лице во банка на ден 01.05 приложува меница (А) со номинална вредност од 50 000 денари со рок на доспевање на ден 16.05 и меница (Б) со номинална вредност од 70 000 денари и рок на доспевање на 31.07. Лицето поднесува барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на неговата сметка на средна дата (на ист ден да располага со двете суми), но притоа ниту банката ниту лицето да не се оштетени. Дисконтната стапка е 8% и за двете меници. Кој е датумот на исплата на сумата од дисконтираните меници и колку изнесува ефективната сума што ќе му се исплати на лицето?

Од приложените параметри добиваме:

- за меница (А), номинална вреднсот N_1 = 50 000 денари и t_1 = 15 дена, и
- за меница (Б), номинална вреднсот N_1 = 70 000 денари и t_1 = 92 дена.

Формула за пресметка на среден рок на дисконтирање:

$$t_s = \frac{\sum_{t=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{t=1}^{n} N_i}$$

среден рок на дисконтирање $= \dfrac{50\,000 \cdot 15 + 70\,000 \cdot 92}{50\,000 + 70\,000} = 60$ денови

$p = 8\%$

$$\mathrm{Dk} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{p}}{360 \cdot 100} = \frac{(50000 + 70000) \cdot 60 \cdot 8}{36000} = 1600$$

ефективна сума: (50 000+70 000) – 1 600 = 118 400 денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои параметри се користат при дисконтните пресметувања?

2. Што претставува меница и од кои елементи се состои?

3. Да се набројат субјектите при трансакција со меница?

4. Меница со номинална вредност од 2 500 денари е поднесена на есконтирање до банка на ден 15.10. Дисконтната стапка изнесува 9%, а рокот на доспевање е на ден 20.11. Врз основа на дадените параметри да се пресмета комерцијалниот и рационалниот дисконт, како и разликата помеѓу нив.

5. Компанијата А врз основа на продадена стока, добива меница со номинална вредност од $ 1 200 000 со рок на доспевање на ден 01.04.2010 година. Поради потребата од дополнителни парични средства, компанијата одлучува да ја продаде меницата (да ја есконтира) на ден 15.03.2010 година. Дисконтната стапка изнесува 7%, провизија 0,05 и $ 500 манипуплативни трошоци. Врз основа на дисконтирање на меницата, да се пресмета колку компанијата добила од банката?

1. 6. Влоговни (депозитни) сметки

Банките претставуваат депозитно - кредитни институциии кои мобилизираат слободни парични средства од суфицитни субјекти (штедачи) и одобруваат кредити на дефицитни субјекти (ентитети кои имаат продуктивни инвестициони идеи, но немаат доволно капитал за реализирање на истите). Имено, традиционални извори на банките се депозитите (орочени депозити и депозити по видување), кои се основа на банката за одобрување кредити, инвестирање и генерирање приход. На тој начин, банките овозоможуваат штедна и кредитна функција преку што овозможуваат ефикасна алокација на паричните фондови и генерирање принос во вид на камата за депонентите (вложувачи во банката) и за банката (врз основа на одобрени кредити).

Секој граѓанин кој сака да штеди може својот паричен депозит да го вложи во банка. За штедниот влог како паричен депозит вложен во банката, се издава штедна книшка во која се пишуваат уплатите, исплатите, состојбата и пресметаните камати по штеден влог. Штедната книшка може да гласи на име и на лице под старателство. Суштествени елементи на жиро-сметката се следниве: име и презиме на вложувачот, дата на раѓање и матичен број, жиро - сметка на банката, бројот на книшката и место за забелешка на банката (ознака дека парите се вложуваат по видување или се орочуваат на определен временски интервал).

Штедната книшка се заверува со потпис и печат на банката. Потребно е да се потенцира дека сите уплати и исплати се внесуваат во книшката и тоа на денот кога настанала промената и секоја промена се заверува со печат и потпис од страна на благајникот.

Со средствата од штедната книшка може да располагаат:

- лицето на која гласи штедната книшка и
- ополномоштено лице овластено од вложувачот, законски застапник и старател.

Вложувањето на депозит (влог) во банката е во функција на штедење, па затоа овој вид на сметки за вложен депозит се нарекуваат сметки на штедни влогови или влоговни сметки. Штедните влогови можат да бидат:

- по видување и орочени (орочени со месечно подигање на каматата, со отказен рок или без отказен рок, со посебна намена или без намена);
- отворени штедни влогови и
- детско отворено денарско штедење.

Податоците за депозитите на граѓаните претставуваат деловна тајна на банката. Исто така, банката може да отвори штедни книшки на странски физички лица во Република Македонија. Каматните стапки се пропишани со деловната политика на банката.

Висината на каматната стапка што се исплаќа на депонентите зависи од од тоа дали станува збор за депозити (влогови) по видување или за орочени депозити. Каматата (интерес) е парична сума, која се плаќа за користење на туѓ капитал. Оваа дефиниција за камата се однесува и на вложени парични средства, при што банката, во која тие се вложени за определен временски период, ги користи средствата и на вложувачите, на кои како надомест, им плаќа камата.

Каматата се пресметува и се додава на влогот (депозитот) на крајот на календарската година за депозити по видување, додека за орочени депозити, каматата се додава на крајот од рокот на орочување. Пресметување на камата, банката врши и на исплатената сума, а самата разлика од каматите на вложената и исплатената сума се допишува на депозитот (штедниот влог).

Денарските штедни влогови се осигурани во Фондот за осигурување на штедни влогови. Фондот ги обештетува физичките лица во висина на 100% од депозитот на секое физичко лице до износот од денарска противвредност на 10 000 ЕУР и 90% од депозитот на секое физичко лице во една банка или штедилница до износот од денарска противвредност помеѓу 10 000 ЕУР и 20 000 ЕУР, но не повеќе од денарската противвредност на 20 000 ЕУР. Во наведениот износ се пресметува главнината на штедниот влог зголемена за камата во висина најмногу до есконтната стапка на Народна банка на Република Македонија, важечка во соодветниот период.

При пресметката на камата за штедни влогови се користи равенката за пресметка на проста камата. При пресметување на простата и сложената камата се вкалкулираат следниве компоненти:

- основна сума - K_o (депозит, зголемен капитал, намален капитал), кој е предмет на вкаматување;
- каматен период, кој е еднаков на времето за кое се вложуваат или користат паричните средства;
- каматна стапка, интерес (p или i);
- каматата, која е еднаква на сумата к која банката треба да ја плати на депонентот, пресметана според договорената каматна стапка и договорениот каматен период.

Формули за пресметка на проста камата во случај кога периодот на вложување е изразен во години, месеци и денови:

- орочени влогови на година $k = \frac{K_0 p}{100}$ или години $k = \frac{K_0 pn}{100}$
- орочени влогови по месеци $k = \frac{K_0 pm}{1200}$
- на пресметка на камата по денови $k = \frac{K_0 pt}{36500}$

За пресметка на камата за дадени влогови, се користи таблицата за детерминирање на деновите за подигање на дадена сума (исплата) пари или деновите за внесување на нови влогови (уплата).

Табела 1

Број на денови по календар до крајот на годината

Ден	Јан.	Феб.	Март	Апр	Мај	Јуни	Јули	Авг.	Сеп.	Окт.	Ноем.	Дек.
1.	365	334	306	275	245	214	184	153	122	92	61	31
2.	364	333	305	274	244	213	183	152	121	91	60	30
3.	363	332	304	273	243	212	182	151	120	90	59	29
4.	362	331	303	272	242	211	181	150	119	89	58	28
5.	361	330	302	271	241	210	180	149	118	88	57	27
6.	360	329	301	270	240	209	179	148	117	87	56	26
7.	359	328	300	269	239	208	178	147	116	86	55	25
8.	358	327	299	268	238	207	177	146	115	85	54	24
9.	357	326	298	267	237	206	176	145	114	84	53	23
10.	356	325	297	266	236	205	175	144	113	83	52	22
11.	355	324	296	265	235	204	174	143	112	82	51	21
12.	354	323	295	264	234	203	173	142	111	81	50	20
13.	353	322	294	263	233	202	172	141	110	80	49	19
14.	352	321	293	262	232	201	171	140	109	79	48	18
15.	351	320	292	261	231	200	170	139	108	78	47	17
16.	350	319	291	260	230	199	169	138	107	77	46	16
17.	349	318	290	259	229	198	168	137	106	76	45	15
18.	348	317	289	258	228	197	167	136	105	75	44	14
19.	347	316	288	257	227	196	166	135	104	74	43	13
20.	346	315	287	256	226	195	165	134	103	73	42	12
21.	345	314	286	255	225	194	164	133	102	72	41	11
22.	344	313	285	254	224	193	163	132	101	71	40	10
23.	343	312	284	253	223	192	162	131	100	70	39	9
24.	342	311	283	252	222	191	161	130	99	69	38	8
25.	341	310	282	251	221	190	160	129	98	68	37	7
26.	340	309	281	250	220	189	159	128	97	67	36	6
27.	339	308	280	249	219	188	158	127	96	66	35	5
28.	338	307	279	248	218	187	157	126	95	65	34	4
29.	337		278	247	217	186	156	125	94	64	33	3
30.	336		277	246	216	185	155	124	93	63	32	2
31.	335		276		215		154	123		62		1

1. Одреден субјект вложил во банката паричен износ од 10.000 денари со 9% годишна каматна стапка. Со колку пари ќе располага депонентот после 5 месеци?

K_o= 10 000 денари
p = 9%
m = 5 месеци

Врз основа на дадените параметри, каматата која депонентот ќе ја добие после пет месеци изнесува:

$$k = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 5}{1200} = 375 \text{ денари}$$

Врз основа на пресметаната камата, депонентот по пет месеци, ќе располага со 10.375 денари, како резултат на зголемениот основен капитал со каматата за дадениот период на вкаматување. ♦

2. Одредено лице вложува 100 000 денари во банка, на ден 25.05, додека на 01.10 подигнал 45 000 денари. Колку изнесува износот на каматата на крајот од годината, ако банката применува каматна стапка во висина од 5%.

Ko = 100 000 денари

p = 5%

t_1 = 221 дена (од 25.05 до крајот на годината)

K_1 = –45 000 денари

t_2 = 92 дена (од 01.10 до крајот на годината)

$$i = i_1 - i_2 = \frac{100000 \cdot 5 \cdot 221}{36500} - \frac{45000 \cdot 5 \cdot 92}{36500} = 3027,4 - 567 = 2460,3\,. \ ♦$$

3. Во текот на 2009 годината на сметката на штедните влогови на депонентот X настанале промени, при што каматната стапка е во износ од 5%:

10.01.2009	Уплата	10 000
15.02.2009	Уплата	8 000
01.03.2009	Исплата	6 000
20.03.2009	Уплата	2 000

Врз основа на горенаведеното да се прокнижат сите промени на влоговната сметка.

За секоја уплата и исплата веднаш се пресметува каматата од денот на уплата (исплата) до крајот на годината.

камата: 5%

Датум	Уплати	Исплати	Салдо	Ден	Камата		
					+	–	Салдо
10.01.2009	10 000		10 000	356	487,67		487,67
15.02.2009	8 000		18 000	320	351		838,67
01.03.2009		6 000	12 000	306		251,5	587,16
20.12.2009	2 000		14 000	12	3,29		590,44
31.12.2009	590,44	Камата	14 590,44			590,44	
Вкупно 31.12.2009	20 590,44	6 000	14 590,44		841,96	841,96	0

Задачи за самостојна работа

1. Кои се традиционални извори на банките врз основа на кои банката прави пласмани?

2. Да се набројат компонентите кои се применуваат при пресметката на проста и сложена камата?

3. Да се набројат суштествени те елементи на жиро-сметката?

4. Лицето А, на ден 25.01.2010 година, вложува во банка износ од 50 000 денари, а на ден 20.09.2010 година подигнал 35 000. Да се пресмета износот (салдото) на крајот од годината ако банката применува каматна стапка во висина од 8%.

5. Во текот на 2009 година, на сметката за штедни влогови на лицето Х, се извршени следниве промени:

05.01. 2009	Уплата	3 000
20.01. 2009	Исплата	2 500
31.01.2009	Уплата	3 200
28.02.2009	Уплата	3 350
03.04.2009	Исплата	4 000
04.06.2009	Уплата	5 000
09.09.2009	Исплата	3 700
10.11.2009	Уплата	3 000
25.12.2009	Исплата	5 000

Да се пресметаат промените на штедната книшка (сметка) ако каматната стапка е 7.5%.

1. 7. Кредитна жиро - сметка

Во рамките на стопанисувањето, банките и финансиските институции вршат трансфер на капиталот во потенцијално продуктивни цели. Имено, одредени деловни ентитети имаат инвестициски планови, но немаат доволно средства за нивно реализирање. Исто така, домаќинствата се соочуваат со потребата од дополнителен капитал наменет за лична потрошувачка. Со цел да се задоволат барањата на корпоративните клиенти и домаќинствата, банките одобруваат бизнис кредити и потрошувачки кредити за населението.

Во зависност од рокот на доспевање, се разликуваат следниве видови кредити:

- краткорочни кредити (рок на доспевање до една година);

- среднорочни кредити (рок на доспевање од една до три години) и
- долгорочни кредити (рок на доспевање над три години).

Краткорочните кредити се наменети за финансирање на тековните потреби на клиентите, одржување на краткорочната ликвидност во трговијата, за производство, за извоз и плаќање на услуги. Користењето на краткорочните кредити е по барање на клиентот и може да биде сукцесивно или револвинг. Враќањето на кредитот е во еднакви месечни ануитети до рокот на враќање или револвинг со договорна динамика. Обезбедувањето на кредитите се врши со хипотека на недвижност, залог на подвижни предмети, депозит, банкарска гаранција, хартии од вредност и права.

Долгорочни кредити за правни лица – намената на овој вид кредити е за долгорочни вложувања, реализација на инвестициони проекти, купување на основни средства и сл. Рокот на враќање на долгорочните кредити е до три години (или над три години во зависност од политиката на банката). Деноминирани се во денари или се денарски со девизна клаузула.

Начинот на користење на долгорочните кредити е во зависност од барањето на клиентот, сукцесивно на база на документација која докажува савенско користење на средствата. Кредитот се враќа во еднакви месечни ануитети, месечно, тромесечно или полугодишно во зависност од динамиката на инвестицијата. Кредитите се обезбедуваат со хипотека на недвижност, залог на подвижни предмети, депозит, банкарска гаранција, хартии од вредност и права.

Цената на кредитите (каматна стапка) се детерминира во зависност од видот и рочноста на кредитот. За одобрените кредити, банката води посебна сметка, кредитна сметка. Одобрениот кредит се пренесува на жиро - сметка на корисникот преку која се врши и користењето на кредитот. Во случај да дојде до неплаќање на ануитетот (отплата на кредитот и каматата) во предвидениот рок, покрај редовната, се наплаќа и казнета камата. При пресметката на камата деновите се земаат по календар, а за годината се зема 365 денови или 366 денови кога таа е престапна.

За одобрените кредити се води евиденција преку кредитна и жиро - сметка и тоа по електронски пат.

1. Корпоративниот клиент X, од една банка има одобрение за користење на кредит во износ од 1 000 000 денари, со рок на достасување 30.07.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 9% годишно, а за казнената камата 3% годишно. Претпријатието на 01.02.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

20.03.2010	I. отплата	100 000 денари
15.04.2010	II. отплата	120 000 денари
01.08.2010	III. отплата	180 000 денари
15.08.2010	IV. отплата	600 000 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.09.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на корпоративниот клиент X.

Датум на променатa	Износ на промената		Денови за		Камата	
	Да дава	Да зема	Редовна камата	Казнена камата	Редовна камата	Казнена камата
01.02.2010	1 000 000		242		д 59 672	
20.03.2010		100 000	194		з 4 784	
15.04.2010		120 000	168		з 4 971	
01.08.2010		180 000	66		з 7 457	
15.08.2010		600 000	15	46	з 2 219	д 2 268,5
Вкупно:	1 000 000	1 000 000			д 79 103	д 2 268,5

Деновите за редовната камата за износот на кредитот се пресметани за периодот од 01.02 до 30.09. Со износот на каматата се задолжува корисникот на кредитот (дава, ознака - Д). Деновите за редовната камата за другите промени се сметаат од датумот на промената до крајот на пресметковниот период (30.09.2010). Каматата за овој број денови, за соодветната промена, се одзема (зема, ознака-З). Деновите за казнената камата се сметаат од рокот на достасаноста на кредитот до датумот на промената. Со оваа камата се задолжува корисникот.

Жиро - сметка на корпорација X

Дата на промената	Опис	Износ на промената		Салдо
		да дава	да зема	
15.01.2010	Салдо		500 000	500 000
01.02.2010	Кредит		1 000 000	1 500 000
20.03. 2010	I отплата	100 000		1 400 000
15.04. 2010	II отплата	120 000		1 280 000
01.08. 2010	III отплата	180 000		1 100 000
15. 08.2010	IV отплата	600 000		500 000
30.09.2010	9%камата	79 103		420 897
30.09.2010	3% казнена камата	2 268,5		418 628,5
30.09.2010	Салдо за изедначување	418 628,5		
		1 500 000	1 500 000	
01.10	Салдо			418 628,5

Задачи за самостојна работа

1. Да се набројат кои видови на кредити постојат во зависност од рокот на доспевање?

2. Наведи ги карактеристиките и намената на краткорочните кредити.

3. Наведи ги карактеристиките и намената на долгорочните кредити?

4. Од што зависи цената на кредитот?

5. Фирма X, од една банка има одобрено кредит во износ од 20 000 денари, со рок на достасување 26.04.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 7,5% годишно, а за казнената камата 2% годишно. Претпријатието на 01.03.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

05.03.2010	I. отплата	270 денари
12.04.2010	II. отплата	580 денари
17.05.2010	III. отплата	700 денари
23.05.2010	IV. отплата	18 450 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.06.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на фирмата X, ако почетното салдо на жиро - сметката изнесува 50 000 денари.

1. 8. Задачи за вежбање

1. За колку време $17\,628$ денари ќе донесат камата во износ $2\,393$ денари, ако каматната стапка е 6%?

2. Пресметај ја основната вложена сума за која за период 20 март - 28 јуни, со временска матрица $(k,360)$, со каматна стапка $4{,}75\%$ се пресметува двапати поголема камата отколку онаа која се пресметува за сумите $20\,000$ денари на 3 месеци, $40\,000$ денари на 5 месеци и $12\,000$ денари на 6 месеци, со каматна стапка $4{,}5\%$.

3*. Пресметај ја каматната стапка со која за $60\,000$ денари, вложени на периодот $8.03-29.06$, по принцип $(k,360)$, се пресметува камата која претставува 45% од пресметаната камата за сумите од 25000 денари на период $8.04-30.06$, $62\,000$ денари на период $18.04-30.06$ и $75\,600$ денари на период $4.05-30.06$, со временска матрица $(k,365)$ и каматна стапка $6{,}5\%$.

4*. Една третина од основната сума е вложена на $1{,}5$ година, две петтини од сумата на 4 месеци, а остатокот на 80 дена. Каматната стапка за сите поединечни суми е 4%. Вкупната пресметана камата е $8\,500$ денари. Колкава е основната сума?

5. По намалување на основната сума за камата од $4{,}75\%$, за четири месеци, должникот примил $295\,250$ денари. Колкав е долгот, а колкава каматата?

6. Вклучувајќи ја и пресметаната камата со 6%, камата за 60 дена, должникот вратил $50\,500$ денари. Колкава камата ќе донесе капитал двапати поголем од почетниот, ако се орочи на 3 години, за истата каматна стапка?

7. По одбивањето на 9% камата, за периодот $25.01-31.08$, сметајќи го времето календарски $(k,365)$, примени се $100\,000$ денари. Колкав е долгот, а колкава пресметаната камата?

8. Поединец треба да исплати четири долгови на банката и тоа: $45\,000$ денари со 6% камата на 10.04, $100\,000$ денари со 8% камата на 25.04, $70\,000$ денари со 9% камата на 20.05 и $100\,000$ денари со 4% камата на 31.05. На кој ден и со која каматна стапка може поединецот да ги исплати долговите, без никој да биде оштетен.

9. Трговско друштво должи на различни добавувачи $40\,000$ денари со 4% камата за 120 дена, $60\,000$ денари со 4% камата за 240 дена и $100\,000$ денари со 4% камата за 300 дена. По колку дена претпријатието може да ги плати сите три суми наеднаш?

10. Трговското друштво Х долгува $80\,000$ денари на 5.04, $150\,000$ денари на 20.05 и $275\,000$ денари на 30.06. Истовремено побарува $130\,000$ денари на 17.03 и $900\,000$ денари на 5.08. На кој датум може да се плати салдото на долгот?

11. Компанијата Х доставила на есконтирање меница до една банка на ден 06.04.2009 година. Номиналната вредност на меницата изнесува $ 250 000, а рокот на доспевање е на ден 15.05.2009 година. Пресметај го комерцијалниот дисконт и ефективната сума ако банката применува дисконтна стапка од 8%.

12. Компанија Е врз основа на продажба на опрема добива меница во висина од 3 000 000 денари, која треба да ја плати на ден 20.04.2009 година. Поради соочување со проблем од неликвидност, компанијата одлучува да ја есконтира меницата на ден 21.03.2009 година. Дисконтната стапка е 6%, провизија за процесот на дисконтирање изнесува 0,025% и 50 денари изнесуваат манипулативните трошоци. Колку изнесува ефективната сума што ја исплатила банката на сметка на компанијата?

13. Фирма Х е сопственик на меница од 150 000 денари и рок на доспевање на ден 05.05.2009. Фирмата донесува одлука за предвремена продажба на меницата, односно да ја есконтира меницата во банка и тоа ден 05.03.2009, со дисконтна стапка од 9%, провизија во износ од 0,045 и 100 денари манипулативен трошок. Колку изнесува ефективната сума од дисконтираната меница, а колку изнесува комерцијалниот дисконт?

14. На ден 20.04.2010 година, една банка, примила на дисконтирање три еднакви меници со номинална вредност од $ 50 000, а дати на доспевање се следниве: 20.06.2010 година, 10.07.2010 година и на ден 20.07.2010 година. Колку ќе исплати банката на 20.04.2010, ако дисконтната стапка е 8,5 %, провизијата е во износ од 1% и манипулативните трошоци се во износ од 19 денари.

15. Во една банка на ден 15.03.2010 се поднесени две меница за есконтирање:

- меница X со номинална вредност од $ 3 000 000 и дата на плаќање на ден 25.01.2010 година и
- меница У со номинална вредност од $ 5 000 000 и дата на плаќањена ден 20.06. 2010 година.

Клиентот доставил барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на негова сметка на средна дата (на истиот ден да се располага со двете суми). Да се детерминира датумот на која ќе се исплтат дисконтираните вредности.

16. На ден 01.08 се вложени 400 000 денари, а на ден 02.10 се подигнати 120 000 денари. Ако се применува каматна стапка од 5%, колку изнесува каматата на крајот од годината?

17. Во текот на 2010 годината на сметката на штедните влогови на депонентот У, настанале промени, при што каматната стапка е во износ од 10%:

15.03.2009	Уплата	50 000
01.04.2009	Исплата	20 000
05.06.2009	Уплата	18 000
07.07.2009	Исплата	15 000
08.08.2009	Уплата	18 000
01.09.2009	Исплата	13 000

Врз основа на горенаведеното да се прокнижат сите промени на влоговната сметка.

18*. Фирма У, од соодветна банка има одобрено кредит во износ од 70 000 денари, со рок на достасување 25.06.2010 година. Каматната стапка за редовната камата е 10% годишно, а за казнената камата 2% годишно. Претпријатието на 01.04.2010 го искористува целосно одобрениот кредит, додека отплатите се реализирале по следниов тек:

01.05.2010	I. отплата	7 000 денари
10.05.2010	II. отплата	10 000 денари
20.06.2010	III. отплата	15 000 денари
25.07.2010	IV. отплата	38 000 денари

Да се прикажат сите промени на кредитната сметка на банката (со пресметка на редовна и казнета камата) заклучно со 30.08.2010 година. Исто така да се извршат и промените на жиро - сметката на фирмата X, ако почетното салдо на жиро - сметката ознесува 30 000 денари.

2. БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ, ВАЛУТИ И ДЕВИЗИ

2. 1. Финост на благородни метали

Елементите злато, сребро, платина, жива, рутениум, родиум осмиум, паладиум и иридиум познати се како **благородни метали**. Некои од нив се познати од дамнешни времиња. Нивни својства се дека не оксидираат на воздух и не се растопуваат во киселини. Имаат функција на девизни резерви. Затоа, поради нивната важност, контролата на предметите од благородни метали, нивниот состав и содржина (финост), начинот на нивното испитување, жигосување, условите за пуштање во промет и надзорот се уредуваат со закон.

Овде, ќе ги разгледаме златото и среброто. Овие два метали се познати, ценети и користени уште пред повеќе илјада години. Златото и среброто како метали се доста меки и како такви се непрактични за употреба. За да добијат на тврдост, се мешаат со други метали, како што се бакарот, никелот и др. Смесата од два или повеќе метали се нарекува **легура**. Масата на благородниот метал легурата уште ќе ја викаме и **чиста маса**, додека масата на легурата ќе ја викаме **вкупна маса**.

Односот на масата на благородниот метал (чистата маса) и масата на легурата (вкупната маса) се нарекува **финост** на благородниот метал. Изразувањето на финоста на благородниот метал се врши на два начина: **промилен** и **англиски**.

Во промилниот начин финоста на благородниот метал се искажува во промили. Притоа, бројот на промилите дава колку делови благороден метал се содржат во 1000 делови легура. На пример, ако кажеме дека финоста на благородниот метал е 900 ‰, тоа значи дека во 1000 делови легура се содржат 900 делови благороден метал. Ако ја означиме вкупната маса со m, чистата тежина со m_b и финоста со f тогаш изразувањето на финоста на промилен начин е по формулата

$$f=\frac{m_b}{m}\cdot 1000 \text{ ‰}.$$

1. Пресметај ја финоста на златото (на промилен начин) во златен предмет ако чистата маса изнесува $510g$, а вкупната маса $800g$.

Финоста на златото е $f=\frac{510}{800}\cdot 1000=637{,}5$ ‰. ♦

Според англискиот начин на изразување, финоста се изразува во **карати**, а финоста на среброто во **пенивејти**. Чисто злато има финост 24 карати, а финоста на чисто сребро е 240 пенивејти.

2. Златен производ со финост 14 карати, има 14 дела чисто злато од 24 дела легура. ♦

3 Сребрен производ со финост од 200 пенивејти има 200 дела чисто сребро од 240 легура. ♦

Помала мерка од каратот и пенивејтот е **грејн**. Притоа, 1 карат има 4 грејни а 1 пенивејт 24 грејни.

Златото со финост 22 карати се нарекува **стандард злато**, а среброто со финост 222 пенивејти **стандард сребро**. Ако златна (сребрена) легура е подобра од стандард злато (сребро), се користи ознака B (од англ. Better – подобар), односно W (од англ. Worse – полош) ако е полоша.

4. Ако златниот производ е подобар од стандард златото за 1 карат и 2 грејни, запишуваме $B1,,2$. Тоа значи дека златниот предмет има ($22+1,,2=23,,2$) 23 карати и 2 грејни. ♦

5. Сребрен предмет со финост $W7,,7$ е полош од стандард среброто за 7 пенивејти и 7 грејни. Бидејќи $222-7,,7=221,,24-7,,7=214,,17$, заклучуваме дека финоста на сребрениот предмет е 214 пенивејти и 17 грејни. ♦

Задачи за самостојна работа

1. а) Што е финост на благороден метал?
б) Кои се начините на изразување на финоста на благороден метал?

2. Колку дела бакар има златна легура со финост:
а) 920 ‰ б) 870 ‰?

3. Колку карати има чисто злато, а колку стандард злато?

4. Колку грејни има
а) златен предмет со финост 20 карати;
б) сребрен предмет со финост 210 пенивејти?

5*. Колкава е финоста на
а) златен предмет со $B1,,1$; б) златен предмет со $W5,,3$;
в) сребрен предмет со $B10,,11$; в) сребрен предмет со $W12,,8$?

2. 2. Пресметување на финоста

Задачите во кои се пресметува финоста на благороден метал, можат да се поделат на два типа:

- задачи во кои се бара изразување на финоста од промилен начин во англиски и обратно,

• задачи во кои се пресметува финоста на благороден метал ако се познати чистата маса на благородниот метал и вкупната маса на легурата.

1. Изрази ја финоста на злато од 800 ‰ на англиски начин.

Ја поставуваме пропорцијата $x : 24 = 800 : 1000$ и добиваме $x = \frac{24 \cdot 800}{1000} = 19{,}2$ карати. Значи, финоста на златото е 19,2 карати. Бидејќи 0,2 карати се $0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ грејни можеме да кажеме и дека финоста на златото е 19 карати 0,8 грејни, односно ($22 - 19,,0.8 = 21,,4 - 19,,0{,}8 = 2,,3{,}2$) $W\,2,,3{,}2$. ♦

2. На која финост на промилен начин одговара сребро со $B8,,6$?

Прво да ја пресметаме финоста во пенивејти. Имаме $222 + 8,,6 = 230,,6$. Бидејќи 6 грејни се $\frac{1}{4}$ од еден пенивејт, следува дека финоста на среброто е 230,25 пенивејти.

Од пропорцијата $x : 1000 = 230{,}25 : 240$ следува $x = \frac{230{,}25 \cdot 1000}{240} = 959{,}375$ ‰.

Значи, финоста на среброто е 959,375 ‰.♦

3. Сребрен предмет има маса $400g$ и содржи $350g$ чисто сребро. Изрази ја финоста на среброто на промилен начин.

Финоста на среброто е $\frac{350}{400} \cdot 1000$ ‰, односно 875 ‰.♦

4. Златен предмет со вкупна маса $300g$ содржи $249g$ чисто злато. Изрази ја финоста на златото на двата начина.

Прво ќе ја изразиме финоста на промилен начин. Имаме $\frac{249}{300} \cdot 1000$ ‰, односно 830 ‰.

Сега ќе ја претставиме на англиски начин. Од пропорцијата $x : 24 = 830 : 1000$ следува $x = \frac{24 \cdot 830}{1000} = 19{,}92$ карати, односно 19 карати 3,68 грејни. Заклучуваме дека златниот предмет е со $W\,2,,0{,}32$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Изрази ја финоста на сребро на англиски начин ако на промилен начин е 590 ‰.

2. Изрази ја финоста на злато на промилен начин, ако на англиски е $B1,,2$.

3. Финоста на злато е $15{,}36$ карати. Изрази ја финоста на златото на промилен начин?

4. Златен предмет со маса $330g$ содржи $198g$ чисто злато. Изрази ја финоста на златото на:

а) промилен начин; б) англиски начин.

5. Сребрен предмет со маса $250g$ содржи $105g$ чисто злато. Изрази ја финоста на среброто на:

а) промилен начин; б) англиски начин.

2. 3. Пресметување на чиста и вкупна маса

За пресметување на чистата маса на благороден метал треба да бидат познати финоста и вкупната маса.

Ќе разгледаме неколку примери.

1. Колку грама злато има во златен предмет со маса $50g$ и финост 920 ‰?

Од пропорцијата $x:50=920:1000$ следува $x=\dfrac{50\cdot 920}{1000}=46$. Значи, златниот предмет содржи $46g$ чисто злато. ♦

2. Колку грама чисто злато има во златен предмет со финост 18 карати и маса $560g$?

Од пропорцијата $x:560=18:24$ следува $x=\dfrac{560\cdot 18}{24}=420$. Значи, златниот предмет содржи $420g$ чисто злато. ♦

3. Сребрен предмет со финост $W8,,6$ има маса $480g$. Колку грама чисто сребро содржи предметот?

Ја пресметуваме финоста на среброто во пенивејти. Имаме

$222-8,,6=221,,24-8,,6=213,,18$,

односно финоста на среброто е $213\dfrac{18}{24}=213\dfrac{3}{4}=213{,}75$ пенивејти.

Сега, од пропорцијата $x:480=213{,}75:240$ следува $x=\dfrac{213{,}75\cdot 480}{240}=427{,}5$.

Значи, чистата маса на среброто е $427{,}5g$.♦

За пресметување на вкупната маса на легура, потребно е да бидат познати финоста на благородниот метал и чистата маса.

4. Колкава маса има предмет од злато со финост 800 ‰ и чиста маса на златото $648g$?

Имаме $x:648=1000:800$ и оттука $x=\frac{648\cdot 1000}{800}=810$. Значи, вкуната маса на легурата е $810g$.♦

5. Колкава вкупна маса има сребрен предмет со финост 230 пенивејти и чиста маса на среброто $483g$?

Од пропорцијата $x:483=240:230$ добиваме $x=\frac{483\cdot 240}{230}=504$. Вкупната маса на сребрениот предмет е $504g$. ♦

6. Најди ја вкупната маса на сребрен предмет со финост $B1,,12$ и чиста маса на сребро $1341g$.♦

Финоста на среброто е $222+1,,12=223,,12$ или $223\frac{12}{24}=223{,}5$ пенивејти. Тогаш, од $x:1341=240:223{,}5$ следува $x=\frac{1341\cdot 240}{223{,}5}=1440$. Значи, вкупната маса на предметот е $1440g$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Колку чисто злато содржи златен предмет со маса $180g$ и финост 880 ‰?

2. Пресметај ја чистата маса на среброто во сребрен предмет со маса $600g$ и финост $W\,22,,12$.

3*. Сребрен предмет со финост 850 ‰ содржи $595g$ чисто сребро. Колкава е вкупната маса?

4*. Златен предмет со финост $W\,1,,3$ содржи $324g$ чисто злато. Колкава е вкупната маса?

5*. Златен предмет со финост 750 ‰ содржи $126g$ чисто злато. Колку чисто злато треба да се додаде, за финоста на златниот предмет да биде 800 ‰?

2. 4. Поим и значење на валути

Зборот валута, којшто води потекло од латинскиот збор „valuta”, има повеќе значења. Под овој поим се подразбира парично важење, односно официјален паричен стандард на една земја. Самиот поим валута има неколку значења:

- може да означува **монетарен систем на одредена земја, со кој се утврдува основната парична единица** (името, обликот, составот);
- може да ги означува **ефективните пари и парични знаци** (паричници, банкноти), како законско средство за плаќање во внатрешните финансиски трансакции, односно ја означуваат основната парична единица, што ја чини основата на монетарниот систем на една земја;
- во меѓународниот промет, под валута се подразбираат само **ефективните странски пари,** паричните знаци кои се присутни (со кои располагаат) резиденти во странска земја.

Во меѓународниот промет со поимот валута не се опфатени паричните сурогати, како што се: чековите, мениците, акредитивите или другите инструменти на меѓународните плаќања или обезбедувања, туку само националните банкноти и монети како официјални парични знаци.

Според законот за девизно работење на Република Македонија, под странска валута се подразбираат сите видови ефективни странски пари, освен странските ковани златни пари, кои се третираат како благороден метал.

Валутата, како парична единица ја чини основата на монетарниот систем на една земја, претставува со закон определена единица што служи како основно мерило на вредноста во една земја.

Во секоја земја со законски акт се утврдува паричната единица и се определува името на националната парична единица (на националната валута). Имињата на валутите на земјите се разликуваат (на пример, сретнуваме: денар, динар, евро, долар, фунта, шилинг и сл.). Но, исто така сретнуваме исто име за повеќе национални валути коишто се разликуваат по сите други елементи (како што се изгледот, внатрешната и интервалутната вредност и сл.). На пример, паричната единица долар, се користи како национална валута во Австралија, Канада, Хонг Конг и САД.

Валутата како основна парична единица се дели, по правило, на помали делови (ситни пари) кои што обично носат други имиња, со примена на децималниот или друг систем (на пример, доларот на САД се дели на 100 центи, македонскиот денар на 100 дени и сл.)

Во времето на металистичките системи, односно на златното важење, секоја земја со автономен акт, а зависно од својата јачина и стабилност, определувала колкаво количество благодарен метал ќе содржи националната валута. Со тоа, фактички, се определувала ковничката стапка, односно се утврдувало колку парични единици ќе се исковаат од една тежинска единица благодарен метал.

Во современите услови на стопанисување, во ниту една национална економија повеќе не функционираат парите со полна метеријална вредност. Тие секаде се заменети со парични знаци, односно со книжни пари. Материјалот од кој се изработени современите пари има многу мала вредност, така што паричните знаци сами по себе немаат никаква вредност. Книжните пари својата вредност ја стекнуваат преку обемот и количеството на стоките и услугите што можат да се произведат во рамките на дадената национална економија. Вредноста на книжните пари се одржува на определено ниво и со помош на поддршката, односно авторитетот на монетарната власт на дадената земја. Монетарната власт ја определува вредноста на националната валута со автономен закон и има задача да обезбеди доволно ликвидни средства за непречено одвивање на економските трансакции во земјата.

Сите трансакции во стоковното стопанство се остваруваат со помош на пари. Затоа монетарниот систем го координира вкупното функционирање на економијата, заснована на делувањето на стоковното производство и пазарот. Нерамнотежите, што можат да настанат во разните сектори на економијата, добиваат паричен израз и се рефлектираат како нерамнотежа на монетарниот сектор на економијата. Од друга страна, монетарниот сектор на економијата може и самиот да биде сектор во кој се создаваат нарамнотежи, кои потоа се трансмитираат во реалниот сектор на економијата. На тој начин доаѓа до формирање на интеракциски однос меѓу делувањето на монетарниот и реалниот сектор на економијата. Формирањето на економските перформанси, како што се стапката на економски раст, стапката на вработеност, стапката на инфлација, стапката на извоз и увоз и сл., се спроведува токму преку интеракциските односи на варијаблите во реалниот и монетарниот сектор на економијата.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни го значењето на поимот валута.

2. Дефинирај што е валута.

3. Од што зависи вредноста на валутите?

4. Каква е вредноста на книжните пари?

5. Објасни го поимот монетарен систем и монетарна власт.

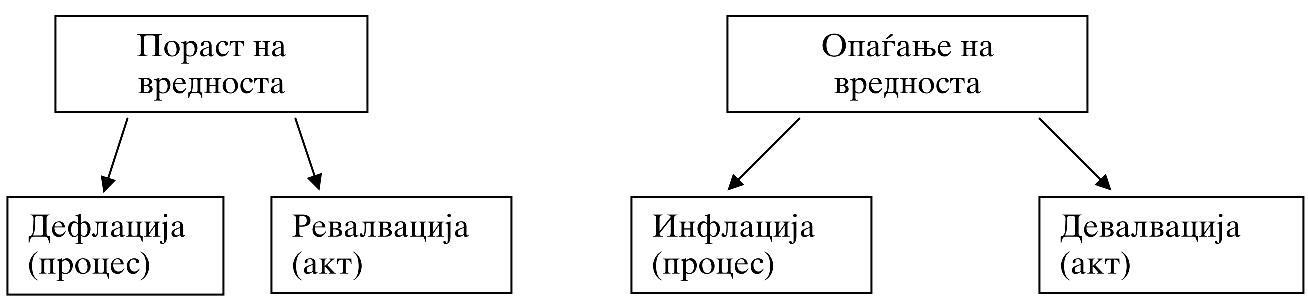
2. 5. Пресметка на промените на вредноста на валутите

Состојбите во една национална економија постојано се менуваат, понекогаш на подобро, а понекогаш на полошо. Во случај да се зголемува општото ниво на продуктивноста во земјата, куповната моќ на националната валута на домашниот пазар ќе расте, иако не дошло до измени во нејзината официјална вредност. Оваа појава се нарекува **апресијација** на валутата.

Во спротивен случај, кога доаѓа до опаѓање на куповната моќ на националната валута на домашниот пазар, без измена на официјалниот курс, таквата појава се нарекува **депресијација.** Доколку ваквите појави се присутни во подолг временски период, тогаш водат кон отварање на процесите на дефлација, односно на инфлација. Излезот од овие ситуации се решава преку промена на вредноста на националната валута во однос на вредноста на странските валути.

Слика 1

Промена на вредноста на националната валута



Континуираните промени во општото ниво на цените ја наметнуваат потребата за промена на курсот на националната валута. Тоа значи дека, намалувањето на интервалутарната вредност на националната валута може да се врши со девалвација и депресијација, додека зголемувањето на интервалутарната вредност може да се врши со ревалвација и апресијација.

Девалвацијата претставува еднострaн и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши намалување на интервалутарната вредност на националната валута. **Депресијација** претставува процес на постепено намалување на интервалутната вредност на националната валута, настанат по пат на дејствување на економските законитости.

Ревалвацијата претставува еднострaн и еднократен акт на монетарната власт, со што се врши зголемување на интервалутарната вредност на националната валута. **Апресијацијата** претставува процес на постепено зголемување на интервалутарната вредност на националната валута, настанат по пат на дејствување на економски законитости.

Во случај на дефлација, монетарните власти на националната економија, со посебен акт ја усогласуваат вредноста на националната валута во однос на странските валути (ревалвација на валутата). Во услови на инфлација, монетарните власти со посебен акт го намалуваат официјалниот курс на домашната валута, со што нејзината вредност ќе опадне, во однос на странските валути.

Во зависност од тековната вредност на една национална валута во однос на друга странска валута, пример, еврото во однос на американскиот долар, вредноста на апресијацијата или депресијацијата на еврото во однос на доларот, се пресметува како дел од зголемувањето или од намалувањето на доларската вредност на еврото.

1. На пример, ако € / $ девизниот курс се промени од €1 = $ 0,93 на €1 = $ 1,09, се вели дека еврото апресира од промената на нејзината доларска вредност за
(1,09 – 0,93)/0,93 = 17.20 %.♦

Општа формула за пресметка на апресијацијата или депресијацијата на еврото во однос на доларот е :

1)

$$\text{Вредност (износ) на апресијација или депресијација на еврото} = \frac{\text{нова доларска вредност на еврото – претходната доларска вредност на еврото}}{\text{претходна доларска вредност на еврото}}$$

2) вредност на апресијација (депресијација) на валута X (€) $= \dfrac{e_1 - e_0}{e_0}$

2. Со замена во примерот (со $e_0 =$ $ 0,93 и $e_1 =$ $ 1,09) се добива 17,20% апрецијација на еврото. ♦

Алтернативно, може да се пресмета и промената на евро вредноста на доларот. Ако доларската вредност на еврото го означуваме со "е" (dollars per euro), тогаш евро вредноста на доларот (euros per dollar) мора да биде реципроцитет или „ 1/е".

3. На пример, ако еврото вреди $ 0,93, тогаш доларот вреди EUR1,075 (1/0,93).♦

Промената на евровредноста на доларот помеѓу времето 0 и времето t изнесува $1/e_t - 1/e_0$. Изразено во проценти, се вели дека доларот депресирал (апресирал) во однос на еврото за дел од зголемувањето или од намалувањето на евро вредност на доларот.

3)

Вредност (износ) на апресијација или депресијација на доларот = (нова евро вредност на доларот – претходната евро вредност на доларот) / претходна евро вредност на доларот

4) вредност на апресијација (депресијација) на валута X ($)= $\frac{1/e_1 - 1/e_0}{1/e_0} = \frac{e_0 - e_1}{e_1}$

4. Со примена на равенката 3, се добива износот на зголемување на евро девизниот курс од $0,93 на $ 1,09, што преставува депресијација на доларот за 14,6% [(0,917–1,075) / 1,075 = –0,146]. ♦

Правило при пресметка на процентуалната промена на девизните курсеви со текот на времето:

- позитивната процентуална промена претставува апресијација на странската валута;
- негативната процентуална промена претставува депресијација на странската валута.

Слика 2

КУРСНА ЛИСТА

ЗА МЕНУВАЧКО РАБОТЕЊЕ

Курсна листа бр.__________

Курсевите важат од 08.00-20.00 на ден _________________200__година

ЗЕМЈА	ШИФРА	ОЗНАКА НА ВАЛУТА	ЗА	КУПОВЕН ЗА ЕФЕКТИВА	ПРОДАЖЕН ЗА ЕФЕКТИВА
ЕМУ	**978**	**EUR**	1		
АВСТРАЛИЈА	**036**	**AUD**	1		
КАНАДА	**124**	**CAD**	1		
ДАНСКА	**208**	**DKK**	100		
НОРВЕШКА	**578**	**NOK**	100		
ШВЕДСКА	**752**	**SEK**	100		
ШВАЈЦАРИЈА	**756**	**CHF**	100		
В.БРИТАНИЈА	**826**	**GBP**	1		
САД	**840**	**USD**	1		

Извор: Народна банка на Република Македонија

Од примерите може да се согледа дека промените на евро девизниот курс во однос на доларот не се еднакви со промените на доларскиот девизен курс во однос на еврото. Причината за тоа е следнава: евро апресијацијата не е еднаква со износот на депресијацијата на доларот, бидејќи вредноста на едната валута претставува инверзна вредност на другата валута. Според тоа, процентуалната промена на вредноста на валутите се разликува поради тоа, што се разликуваат базите врз основа на кои се врши пресметка на промените.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни го поимот депресијација.

2. Што е девалвација?

3. Објасни го поимот апресијација.

4. Што е ревалвација?

5. Курсот евро/долар се променил во текот на денот од 1,45 на 1,53. Пресметај го процентот на промената на еврото (порастот на еврото), како и процентот на промената на вредноста на доларот.

6. Денарот ја смени вредноста во однос на еврото (еднократно) од 61,5 на 90. За каква промена станува збор и во колкав процент?

7*. Швајцарскиот франк апресира во однос на еврото за 4% (претходен курс EUR/CHF 1,33). Кој е моменталниот курс?

2. 6. Поим за девизи

Парите на една национална економија во странство (во друга земја), се јавуваат во два вида: во вид на **ефективни странски пари** или **валути (foreign currency)** и во вид на краткорочни побарувања во странски валути или **девизи (foreign exchange).**

Поимот девизи, произлегува етимолошки од новолатинскиот, односно шпанскиот збор „**devisa**” (странска меница, неговото примарно значење се поврзува со меница, што гласи на странска валута, односно што треба да биде наплатена во странство). Вообичаено девизите се нарекуваат „влезници за странските пазари” и тие се упатници на куповната сила во странство. Тоа значи дека странскиот девизен резидент, како корисник на побарувањата во странство, добива девизи кои што претставуваат побарувања во странска валута. Или, на пример, домашен резидент, како противвредност за реализиран извоз во странство, добива хартија од вредност, како девиза што гласи на странска валута каде извезувал и со истата може да купува стоки во странска земја.

Девизите, како краткорочни побарувања во странска валута претставуваат специфична стока што се купува и продава на девизниот пазар, како сегмент на финансискиот пазар. За имателот на девизите (домашен резидент) тие не претставуваат пари, бидејќи имателот ќе добие домашни пари, откако ќе ги продаде девизите на девизниот пазар или ќе ги презентира кај некоја банка за наплата.

Поимот девиза може да се дефинира во потесна и поширока смисла.

Според **потесната смисла**, девизата е краткорочно побарување во странска валута, настанато по која било основа и без оглед на начинот на располагање со него. Најголем број на земји ја прифаќаат оваа дефиниција за девизите.

Поширoката дефиниција на девизите, освен потесната дефиниција, ги опфаќа и ефективните странски парични средства со кои располаат домашните резиденти. Ова се оправдува со тврдењето дека странските валути претставуваат побарувања на домашните резиденти спрема централната банка, која ги емитувала овие парични средства.

Во Република Македонија прифатена е поширoката дефиниција на девизите, што значи дека под поимот девиза се подразбираат краткорочните побарувања во странство што гласат на странска валута и сите ефективни странски парични средства, освен кованите златни пари.

Тргнувајќи од фактот, дека девизите може да се користат во меѓународниот платен промет (служат како медиум за постигнување на меѓународна ликвидност), дека постојат различни можности за користење на побарувањата во странство (на девизите), во странски средства за плаќање и од начинот на утврдувањето на интервалутните вредности на одделните видови национални пари, девизите би можеле, од економско - политички аспект, да се групираат во две групи: слободни и врзани девизи.

Слободните девизи се дефинираат како побарувања во странство во такви видови странски средства за плаќање, со кои нивните сопственици би можеле да располагаат слободно за плаќање на побарувањата во земјата или за плаќање во некоја друга земја. Најчесто како синоним на слободните девизи се споменуваат конвертибилните, здравите или цврсти девизи.

Врзаните девизи гласат на краткорочни побарувања во странство, во странски средства за плаќање, побарувања што би можеле да се користат само за договорени видови плаќања. Кај врзаните девизи постои карактеристика на ограниченоста, што постои кај сопственикот на сите девизни побарувања при нивното користење. Како синоними на врзаните девизи најчесто се споменуваат неконвертибилните, слабите, меките или клириншките девизи.

Според првиот аспект, кој е поврзан со можноста за извршување на транферот на побарувањата на кои гласи валутата, слободни девизи се девизи, што гласат на конвертибилни валути и што можат да се конвертираат, да се претворат краткорочните побарувања во една валута во краткорочни побарувања во друга валута. Доколку девизите ја немаат оваа карактеристика, се нарекуваат врзани девизи. Односно, врзаните девизи се неконвертибилни побарувања. Тие неможат слободно да се користат за измирување на обврските по основа на меѓународна размена, туку се користат за извршување на договорените видови плаќања, меѓу две земји по договор. Фактички, вaквите девизи немаат слободен трансфер, ниту можат да се конвертират од еден во друг вид.

Од аспект на нивната способност за конверзија, можат да бидат: конвертибилни, неконвертибилни и клириншки девизи. **Конвертибилните девизи** се оние краткорочни побарувања што гласат на странска валута и што може да се заменуваат за други девизи или странски ефективни парични средства, врз основа на претходно утврден паритет. Конвертибилноста може да биде целосна или ограничена.

Доколку девизите не можат да се заменуваат за други девизи или ефективни странски парични средства, станува збор за **неконвертибилни девизи.**

Клириншки девизи се јавуваат во случаите на должничко - доверителни односи, врз основа на билатералните спогодби стекнати преку клириншкиот начин на плаќања. Позитивното салдо од ваквата размена може да се израмни само со купување во земјата - партнер, која остварила негативно клириншко салдо. Ова го оневозможува користењето на обврските на позитивното салдо од една земја, за измирување на обврските во размената со три земји.

Зависно од рокот на доспевање, девизите може да се поделат на **промптни и терминскi.**

Промптните девизи (спот) се доспеани девизи, што можат да се наплатат веднаш, при што мора да се внимава на режимот на користењето на конкретната девиза, што зависи од нејзиниот вид.

Терминските девизи не се доспеани, односно неможат да се наплатат веднаш, туку треба да се чека да помине одреден временски период што е однапред договорен. Најчесто терминските девизи се купуваат заради обезбедување од курсниот ризик или пак од чисти шпекулативни мотиви, со цел да се заработи на разликите во курсот.

Задачи за самостојна работа

1. Дефинирај го поимот девиза во потесна и поширока смисла на зборот.

2. Објасни ја разликата помеѓу валути и девизи

3. Поделба на девизи од аспект на конвертибилноста.

4. Објасни ги промптните и терминските девизи.

5. Клириншки девизи, поим и значење.

2. 7. Поим и суштина на девизниот курс

Девизниот курс, претставува цена на една единица странска валута изразена во домашни пари.

Според тоа, секоја странска, валута односно краткорочно побарување, што гласи на странска валута, на домашниот пазар претставува девиза и има своја цена т.е. девизен курс.

Девизниот курс треба да се разликува од девизниот (валутниот) паритет, што претставува званично утврдена вредност на националните пари, искажани во некој пошироко прифатен именител (деноминатор): злато, некоја стабилна и важна валута и сл. Во нормални прилики, девизниот курс се движи околу девизниот паритет, како основа.

Всушност, девизниот курс претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, односно колку единици на домашна валута треба да се дадат за единица странска валута. Кога курсот се изразува на ваков начин, станува збор за т.н. систем на **директно котирање**.

Системот на индиректно котирање, го применува само Велика Британија (и нејзини поранешни колонии), каде што девизниот курс се дефинира како број на единици на странска валута, кој треба да се даде за единица домашна валута. [1]

Номинален девизен курс претставува цена на домашната валута изразена во странска валута, без вкалкулирање на стапката на инфлацијата (не се зема во предвид стапката на инфлација).

Реален девизен курс е номинален девизен курс, корегиран со стапката на инфлација и тој е многу важен, бидејќи инфлацијата ја обезвреднува вредноста на валутата, т.е. ја намалува нејзината куповна моќ. Со корекција на номиналниот курс

---

[1] Девизниот курс се нотира директно кога во домашна валута се изразува цената на 1 или 100 странски валути (1 EUR = 61 денар) или индиректно кога девизниот курс се изразува како цена на 1 или 100 единици на домашна валута во странски валути (100 денари = 1,80 EUR).

со стапката за инфлација, се добива реална слика на куповната моќ на адекватанаата валута.

Ефективен девизен курс е пондериран просек на девизните курсеви помеѓу домашната валута и валутата на земјата, која е наш значаен трговски партнер.

Бидејќи постои можност за фалсификување на ефективните пари, во практика банките посебно ја покажуваат висината на **девизниот курс за ефектива,** кој по правило е понизок од курсот на девизите, поради можноста за фалсификување на парите и поради манипулативните трошоци за пренос од земја во земја.

Секоја меѓународна трансакција се состои од две купувања: купување на предметот на меѓународна размена и купување на валута. Тоа значи дека увозникот од земјата Х, ако увезува стока од земјата У, тој не купува само стока, туку мора да купи и валута од земјата У. Така доаѓаме до заклучок, дека во меѓународната размена се формираат и цени на пооделните национални валути, а не само цени на предметот на меѓународната размена.

Тоа можеме да го прикажеме преку следниве релации:

а) за извозот: $Ei = Qi \cdot pi \cdot T$ односно, вредноста на извозот на определена стока е еднаква на производот на количината на стоката, цената постигната на странскиот пазар на девизи и курсот на странската валута.

б) за увоз: $\mathrm{U}i = Qi \cdot pi \cdot T \ (1+ti)$ односно, вредноста на увозот на некоја стока е еднаква на производот на количината на таа стока со нејзината цена на пазарот на набавка и курсот на девизата со која се плаќа, зголемена за увозните давачки $(1+ti)$.

Понекогаш, девизните и валутните курсеви се означуваат со заедничко име, **интервалутен курс**.

Интервалутниот курс претставува цена, по која се врши размена на ефективните пари на една земја за ефективните пари на друга земја.

Секоја валута има свој паритет, односно свој валутен курс, што претставува појдовна точка во определувањето на интервалутните односи.

Девизните курсеви се формираат на девизен пазар под влијание на понудата и побарувачката на девизи. Понудата и побарувачката за девизи ја отсликуваат состојбата во платниот биланс. Дефицитот во платниот биланс значи дека побарувачката за девизи е поголема од понудата. Суфицитот во платниот биланс значи дека понудата за девизи е поголема од побарувачката.

Задачи за самостојна работа

1. Што претставува дезиниот курс?

2. Објасни директна котација.

3. Објасни индиректна котација.

4. Номинален, реален и ефективен девизен курс, поим и значење.

5. Што е интервалутен курс?

2. 8. Спот транскации

Основна транскација на девизниот пазар е **спот договорот.**

Спот трансакција е купување или продажба на една валута за друга, со рок на испорака два работни дена после датата на тргувањето - дилингот (датата кога е направен контактот). Ова овозможува да се подготват потребните документи за трансакцијата и да се организира готовинскиот трансфер.

Спот трансакцијата е моментална размена на една валута за друга. **Спот девизен курс** е моменталниот (тековен) курс или пазарна цена, цена за споредба. Спот трансакциите не значат дека веднаш се вршат плаќањата (исплатите). Според конвенција, дата на исплата или дата на вредноста (settlement date, value date) е вториот работен ден после датата на тргувањето (second business day after the „deal date” or „trade date”) кога трансакцијата е договорена од двата дилери. Периодот од два дена обезбедува доволно време за двете договорни страни да го потврдат договорот и да договорат порамнување (клиринг или потребните задолжувања и одобрувања на банкарски сметки на различни локации.

Како исклучок, спот трансакциите помеѓу канадскиот долар (CAD) и САД доларот (USD), конвенционално се исплатуваат еден работен ден после тргувањето (поради тоа што Канада и САД се во иста временска зона).

Да повториме, спот важи два работни дена после датата на тргувањето.

Спот трансакциите претставуваат директна размена на една валута за друга и кога ќе се извршат, следува трансферот преку системот за плаќања на двете земји, чии валути се инволвирани.

Во типична спот трансакција, Банка А од Њујорк договара на 1 јуни да продаде 10 милиони долари за евра на Банка Б во Франкфурт, по курс, да речеме 0,785 ЕУР за долар, со вредност од 3-ти јуни. На 3-ти јуни, Банка Б ќе плати 7,85 милиони ЕУР на сметка на Банка А во Германија, а Банката А ќе плати 10 милиони долари на сметка на Банката Б во САД. Со извршувањето на двете плаќања се комплетира трансакцијата.

На девизниот пазар постојат **две цени за секоја валута**- една цена по која продавачите на одредена валута сакаат да продадат и друга цена по која купувачите сакаат да купат (куповен и продажен курс). Од маркет-мејкерот се очекува да ги котира за своите комитенти двата курса, со што го „прави пазарот” (making a market).

Кај спот курсевите важно е да се знае како истите котираат, односно термините директна и индиректна котација, европски и американски услови и сл.

Котирањето на девизниот курс, како цена на една валута во однос на друга, се јавува во две форми: директна котација која претставува износ на домашна валута (пр. долари, ако сте од САД или денари, ако сте од Македонија) за единица на странска валута и второ, како индиректна котација која претставува единица на странска валута за единица на домашна валута (во долари, ако сте од САД или во денари, ако сте од Македонија).

Фразата „американски услови” („American terms”) значи котирање од гледна точка на некој лоциран во САД, односно, за долар, тоа значи дека курсот е котиран во варијабилен износ на долари (USD) за една единица на странска валута (пр. 1,27 за EUR).

Фразата „европски услови” значи директна котација од гледна точка на некој лоциран во Европа. За доларот, тоа значи варијабилен износ на странска валута за еден USD (или EUR 0,785 за $1).

Кога во 1978 година, девизниот пазар се интегрираше во единствен глобален пазар, заради олеснување, практиката на пазарот во САД се смени, по иницијатива на брокерите, за да се усогласи со европските конвенции.

Така ОТЦ пазарот во сите земји сега ги котира доларите по европски услови, спроти речиси сите други валути (значи, износ на странска валута за $1). Тоа значи дека доларот е речиси секогаш базна валута (base currency), една единица ($1) се купува или продава за варијабилен износ на странска валута.

Постојат исклучоци од ова генерално правило, поточно на сите ОТЦ пазари во светот, фунтата продолжува да се котира како базна валута. Оттука, маркет-мејкерите и брокерите насекаде во светот ја котираат фунтата стерлинг (GBP) за x долари за фунта. Велика Британија не го усвои децималниот валутен систем се до 1971 година и беше полесно математички да се котира и тргува по услови на варијабилни износи на странска валута за фунта, отколку спротивно. Одредени валути, кои историски се поврзани со GBP, (валути на Ирска, Австралија и Нов Зеланд), котираат на ОТЦ пазарот на ист начин како и фунтата (варијабилен износ на евра за една единица).

Директните и индиректни котирања се реципрочни и лесно се утврдуваат еден од друг.

Секоја девизна трансакција опфаќа две валути и тука е важно да се знае која е **базната валута** (Base Currency, котирана, фиксирана) и која е **условната валута** (Terms Currency) или пресметувачка (counter currency).

По правило, девизниот курс (exchange rate) помеѓу две валути, на пример USD и JPY се пишува USD/JPY и се однесува на бројот на JPY кој е еднаков на 1 USD, додека JPY/USD се однесува на број на USD еднаков на 1 JPY.

Кодот на валутата напишан на левата страна е базна валута и секогаш е единица.

Кодот на валутата напишан на десната страна е варијабилна валута (условна, пресметувачка единица или котирана валута). Бројот на единици на таа валута е еднаков на една единица на базната валута, согласно курсот.

Секогаш се пишува базната валута на левата страна. Сооднос NOK/DKK, на пример, значи број на DKK за NOK.

1. Курсот CHF/DKK е 4,1235. Ако купиме CHF 1 милион, наспроти DKK, колку DKK треба да платиме? Бројот 4,1235 значи број на DKK за 1 CHF. Оттука, треба да платиме ДКК 4 123 500:

$1\,000\,000 \cdot 4{,}1235 = 4\,123\,500$. ♦

2. Ако наместо претходната трансакција, сакаме да купиме DKK 1 милион за CHF, колку CHF треба да платиме (курсот CHF/DKK е 4,1235)? Во тој случај тоа е CHF 242 512,43:

$1\,000\,000 : 4{,}1235 = 242\,512{,}43$. ♦

Варијабилната валута е броител, а базната валута именител. Кога броителот расте, базната валута зајакнува и станува поскапа. Кога броителот се намалува, базната валута слабее и станува поефтина. Базната валута секогаш се кажува прва, во говорната комуникација.

Котацијата долар/јен (USD/JPY) значи дека доларот е базна валута и именител, а јенот е варијабилна и именител. Некои од валутите имаат и прекари (фунта - Cable, швајцарски франк- Swissie, австралиски долар - Aussie). Cable е прекар за GBP/USD курс.

Курсевите кои ги котира маркет-мејкерот се секогаш од негова точка на гледање (куповен курс, по кој тој купува една единица базна валута и продажен, по кој тој продава за единица базна валута).

Маркет-мејкер прашан за курсот USD/CHF може да одговори 1,4975-85, со што кажува дека куповен курс за CHF е 1,4975 за долар и продажна цена од CHF 1,4985 за долар. Обично, маркет мејкерот едноставно котира 75-85, односно претпоставува дека комитентот знае дека големата бројка („big figure”) е 1,49. Куповниот курс е секогаш прв, од лева страна и е понизок од продажниот курс (од десна страна). Разликата се нарекува маржа (spread).

Куповниот и продажниот курс се изразуваат во четири децимали, односно стоти дел од 1% или 1/10 000 од варијабилната валута и се нарекува *пипс*. Кај некои валути, кои имаат мала апсолутна вредност, како јенот, може да се котира со две децимали и пипс е 1/100 од варијабилната валута. На секој пазар пипс или тик е најмалиот износ на промена на цената .

Задачи за самостојна работа

1. Што е спот трансакција?

2. Објасни спот девизен курс?

3. Што е базна, а што условна валута?

4. Купуваме 100 000 EUR со долари (курсот е EUR/USD 1,44). Колку долари треба да платиме?

5*. Купуваме 100 000 USD со евра (курсот EUR/USD 1,46). Колку евра треба да платиме?

2. 9. Како котираат спот курсевите

Кога котираат спроти еврото (EUR), пракса е на меѓубанкарскиот пазар да се котираат повеќето валути, во услови на различен број на единици на валути, за 1 EUR. Со други зборови, EUR е базна валута, доколку една или две валути се опфатени.

Слично, покрај EUR, како меѓубанкарски договор е да се котираат сите валути спрема USD како базна валута.

Иако дилингот е можен помеѓу било кои две конвертибилни валути, пример, NZD спрема EUR или CHF спрема JPY, меѓубанкарскиот пазар, историски најмногу котира спрема USD, со што се редуцира бројот на индивидуални курсеви кои треба да се котираат. Девизните курсеви помеѓу било кои две не-USD валути можат да се пресметаат од курсот на секоја валута наспроти USD.

Курсевите помеѓу било кои две не-USD валути се познати како **вкрстени курсеви (cross-rate).**

Денес терминот вкрстени курсеви се користи како израз за било кои девизни курсеви, кои се пресметани од други два курса, на пример, GBP/SEK курс може да се пресмета со комбинирање на EUR/GBP курс и EUR/SEK курс.

Тргување со вкрстени курсеви (Cross Rate Trading) претставува размена на валути, во кои доларот не е ниту базична ниту варијабилна валута, пр. EUR/JPY (EUR-базна, JPY- варијабилна).

Како и на другите пазари, банките нормално котираат две цени, кои покажуваат до кое ниво тие се подготвени да купуваат базна валута наспроти варијабилната (куповен курс – **bid-** за базната валута е пониските курс) и ниво за кое е подготвена да продава базна валута за варијабилната валута (продажен курс, **offer (ask)**- на базната валута, односно повисокиот курс).

3. Ако банката е подготвена да купи USD за 1,4375 CHF и продаде USD за 1,4385 CHF, USD/CHF курсот ќе котира како 1,4375/1,4385. ♦

Разликата помеѓу двете страни на котацијата е позната како маржа („spread”).

Bid е цената од лево, по која банката која котира ја купува базната валута. Offer е цената од десно, по која банката која котира ја продава базната валута. Спред е разликата помеѓу bid и offer (куповниот и продажниот курс).

Постојат и **реципрочни курсеви**. Било која котација на одредена валута како базна валута, може да биде конвертирана во еквивалентна котација, со валута како варијабилна валута, со нејзина реципрочна вредност.

4. USD/CHF котацијата од 1,4375/1,4385 може да се конвертира во CHF/USD котација од (1:1,4375)/(1:1,4385). Како и да е, тие сепак можат да бидат котирани со помалиот број од лева страна, така што две страни на котацијата се спротивни: 0,6952/0,6957. Во друг случај, банката купува базна валута наспроти варијабилната валута од лева и продава базна валута за варијабилна од десна. ♦

Курсевите типично се котираат како $\frac{1}{100}$ (стоти дел) од центот.

Овој износ е познат како поинт или пип (поен или пип). На пример, USD/CHF курсот обично ќе котира како четири децимален број - 1,4375/1,4385. Ова зависи од големината на броевите и во случајот на USD/JPY, на пример, договор е да се користат 2 децимали. Во USD/JPY котацијата е 105,05/105,15, каде 15 поени значи 0,15 JPY, а во двата случаеви, еден поен е онаа единица на последниот котиран децимален број.

5. Кога се тргува со USD/CHF во износ од УСД 1 милион, вредноста на еден поен е CHF 100. Со други зборови, CHF 100 е големина на профитот или загубата направена од дилот, ако девизниот курс се помести за еден поен:

1 000 000 · CHF 0,0001 = CHF 100. ♦

Поен (point) е една единица од последната децимала од девизниот курс. Девизниот курс обично котира во поени или пипсови, најчесто со последните две децимали. Големите бројки (big figure) се првиот дел од девизниот курс, без поените.

Задачи за самостојна работа

1. Објасни куповен - продажен курс?

2. Што се вкрстени курсеви?

3. Што е пипс?

4. Што е спред (маржа)?

5*. Курсот EUR/USD е 1,44 - 1,46. Прикажи го реципрочниот курс.

2. 10. Профит и загуба

За да се оствари профит од дилингот, целта на банката е да ја продаде базната валута, по највисок курс што е можно наспроти варијабилната валута и да ја купи базната валута по најниска цена.

1. Курсот USD / CHF е 1,483/1,485

Трговија 1: Банката купува USD 1 000 000 за CHF по 1,4830

Трговија 2: Банката продава USD 1 000 000 за CHF по 1,4855

Паричен тек (cash flows)

	USD	CHF
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 483 000
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 485 500
Нето резултат:		+ CHF 2 500

Банката направила профит од CHF 2 500. ♦

2. Купуваме USD 1 милион за CHF кога спот USD/CHF е 1,5835. Подоцна, истиот ден, ја затвораме својата позиција со продавање на USD 1 милион кога спотот USD/CHF е 1,5836. Со тоа оствaруваме профит од 1 поен.

Паричен тек (cash flows)

	USD	CHF
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 583 500
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 585 600
Нето резултат:		+ CHF 100

Оттука, вредноста на 1 поен на USD/CHF во дил со USD 1 милион изнесува CHF 100.♦

3. Купуваме USD 1 милион за JPY кога спот курсот е USD/JPY е 118,35. Подоцна, истиот ден, ја затвораме позицијата со продавање на USD 1 милион, повторно кога спот цената USD/JPY е 118,36. Со тоа остваруваме профит од 1 поен.

Паричен тек (cash flows)

	USD	JPY
Трговија 1:	+ USD 1 000 000	- JPY 118 350 000
Трговија 2:	- USD 1 000 000	+ JPY 118 360 000
Нето резултат:		+ JPY 10 000

Оттука, вредноста на 1 поен на USD/JPY во дил со USD 1 милион изнесува JPY 10 000. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Курсот EUR/CHF е 1,32 - 1,34. Ако по курс се купени и продадени 20 000 CHF со дадениот спред, колкав профит е остварен?

2*. Физичко лице купило 10 000 EUR по продажен курс од 61,70 МКД. После извесен период ги продало 10 000 EUR по куповен курс од 61,40 МКД. Кој е нето-резултатот?

2. 11. Одржување на позиција

Во секое време дилерот треба да знае која е неговата позиција (одржување на позиција-position keeping) – нето резултатот на сите негови тргувања, кои ги направил во текот на денот. Тој, исто така, треба да знае кој е **просечниот девизен курс** за неговата нето-позиција, така да може да го спореди со тековниот девизен курс на пазарот, за да види дали неговата позиција е профитабилна или не. На крајот од денот, тој не мора да ја затвори позицијата, но во тој случај е потребно да направи **marking to market** на позицијата, односно да го пресмета **неостварениот профит или загуба** на позицијата до сега. Тоа се постигнува преку пресметување колкав треба да биде профитот или загубата, ако вие фактички ја затворите позицијата по тековната стапка (current rate), односно на крајот на денот.

1. Сте преземале 3 спот тргувања за USD/CHF според следното:

Продажба на USD 4 милиони по 1,6723

Купување на USD 1 милион по 1,6732

Купување USD 5 милиони по 1,6729

Пазарот затвора по курс USD/CHF 1,6730.

Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е Вашиот нето профит или загуба?

	USD	CHF
	– 4 000 000 по 1,6723	+ 6 689 200
	+ 1 000 000 по 1,6732	– 1 673 200
	+ 5 000 000 по 1,6729	– 8 364 500
Позиција	+ 2 000 000	– 3 348 500

Просечна стапка: $\frac{3\,348\,500}{2\,000\,000} = 1{,}67425$

	– 2 000 000 по 1,6730:	+ 3 346 000
Загуба:		–2 500

Позицијата е повеќе купени USD 2 милиони. Просечна стапка е 1,67425, загубата е CHF 2 500. Загубата може да биде изразена и во USD со конверзија во USD по спот курсот, или во било која валута, со конверзија по соодветна спот стапка. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Во 10 часот спот курсот EUR/NOK е 7,44 (котацијата е за 100 NOK). Продаваме NOK 500 000 по тој курс, а во 14 часот курсот EUR/NOK е 7,66. Во 19 часот следува нова промена на курсот и тој изнесува EUR/NOK 7,35. Прикажи ги профитот или загубата во двата термини.

2. Сте преземале 3 спот тргувања за USD/CHF според следното:

Купени CHF 100 000 по USD/CHF 1,041

Продадени CHF 200 000 по USD/CHF 1,038

Купени CHF 300 000 по USD/CHF 1,039

Пазарот затвора по USD/CHF 1,045

Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е вашиот нето профит или загуба?

3. Куповен курс на менувачницата за USD е 49.50 а продажен курс е 50,00 МКД. Колку е заработката на купени и продадени 200 USD?

4. Купени се 100.000 EUR со USD по курс EUR/USD 1,40. Сега курсот EUR/USD е 1,23. Колкава е загубата ако сега се продадат еврата?

5. Купени се 10.000 AUD, по курс EUR/AUD 1,44 во 10 часот. Во 12 часот курсот е 1,45, а во 15 часот 1,437. Кога требало да се продадат австралиските долари за да се оствари профит?

2. 12. Задачи за вежбање

1. Изрази ја, на англиски начин, финоста на златото од 820 ‰.

2. Изрази ја, на промилен начин, финоста на злато $W\,7,,2,4$.

3. Изрази ја, на промилен начин, финоста на сребро $W\,10,,12$.

4. Сребрен предмет има маса $600g$ и содржи $480g$ чисто сребро. Изрази ја финоста на среброто на:
а) промилен начин; б) англиски начин.

5. Златен предмет со финост $B1,,2$ има маса $120g$. Колкава е вкупната маса?

6. Сребрен предмет со финост 750 ‰ содржи $222g$ чисто сребро. Колкава е вкупната маса?

7*. Пресметај ја финоста на легура на злато направена од $500g$ злато со финост 900 ‰ и $750g$ злато со финост 850 ‰.

8*. Пресметај ја финоста на легура од сребро направена од $100g$ чисто сребро, $100g$ бакар и $500g$ сребро со финост 204 пенивејти.

9. Курсот долар/франк се променил во текот на денот од 1,21 на 1,23. Пресметај го процентот на промената на доларот (порастот на доларот), како и процентот на промената на вредноста на франкот.

10. Денарот ја смени вредноста во однос на доларот, постепено од 61,5 на 75. За каква промена станува збор и во колкав процент?

11. Еврото апресира во однос на швајцарскиот франк за 5% (претходен курс EUR/CHF 1,33). Кој е моменталниот курс?

12. Во 10 часот спот курсот EUR/USD е 1,44. Продаваме USD 5 000 по тој курс, а во 14 часот курсот EUR/USD е 1,46. Во 19 часот следува нова промена на курсот и тој изнесува EUR/USD 1,43. Прикажи ги профитот или загубата во двата термини.

13*. Сте преземале 3 спот тргувања за EUR/AUD според следното:
Купени AUD 100 000 по 1,622
Продадени AUD 300 000 по 1,632
Купени AUD 600 000 по 1,641
Пазарот затвора по 1,635
Каква е вашата позиција? Кој е просечниот курс за таквата позиција? Колкав е вашиот нето профит или загуба?

3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

3. 1. Поим за степен со реален показател

Во твоето досегашно изучување на математиката се запозна со поимите степен на позитивен реален број a во случај кога степеновиот показател е природен број, цел број или рационален број. Да се потсетиме.

1. Изврши ги означените операции со степени:

а) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}$ б) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$ в) $9^{-\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}$

Од дефиницијата на степен со рационален показател и својствата на степен со рационален показател имаме:

а) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}=x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-(-0,5)}=x^{\frac{23}{12}}$

б) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x-y$

в) $4^{\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{4}+\dfrac{1}{\sqrt{0,25^3}}=2+\dfrac{1}{0,125}=2+8=10$

Во оваа лекција ќе дефинираме степен со реален показател, кој претставува проширување на дефиницијата за степен со рационален показател и ќе се запознаеме со неколку основни својства на степените со реален показател.

За секој реален број x и секој позитивен реален број a е определен степен со реален показател a^x на следниот начин.

I. Ако $x>0$ и

1. $x=n,$ тогаш $a^x=\begin{cases} a & \text{за } n=1 \\ \underbrace{aa...a}_{n} & \text{за } n>1 \end{cases}$

2. $x=\dfrac{1}{n},$ тогаш $a^x=\sqrt[n]{a}$

3. $x=\dfrac{k}{n},\ k\in\mathbb{N},$ тогаш $a^x=\sqrt[n]{a^k}$

4. $x=c_0,c_1c_2...c_n...,$ тогаш

а) за $a>1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...c_n}<a^{c_0,c_1c_2...c_n...}<a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

б) за $0<a<1,$ имаме $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}<a^{c_0,c_1c_2...c_n...}<a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

в) за $a=1,$ имаме $a^x=1$

II. Ако $x=0$ тогаш $a^x=1$

III. Ако $x<0$ тогаш $a^x=\dfrac{1}{a^{|x|}}$

2. а) Согласно горната дефиниција на степен со реален показател изразот 5^{-x}, за $x > 0$, има смисла, бидејќи $a = 5 > 0$, додека изразот 5^{-x}, за $x > 0$, нема смисла, бидејќи $a = -5 < 0$.

б) Изразите 0^{-x}, за секое $x \in \mathbb{R}$, и 0^{x}, за секое $x \in \mathbb{R}$, немаат смисла бидејќи $a = 0$. ♦

За степен на позитивен реален број a со реален показател важат следниве својства:

1. $a^x = b^x$, за секое $x \in \mathbb{R}$ ако и само ако $a = b$

2. За секој $x \in 3$ постои единствен степен a^x

3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$

5. $(ab)^x = a^x b^x$ за секое $x \in \mathbb{R}$

3. Непосредно од дефиницијата на степен со реален показател и погорните својства следува дека

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x (b^{-1})^x = a^x b^{-x} = \frac{a^x}{b^x}. \ ♦$$

4. Изврши ги означените операции со степените:

а) $3^x 4^x$ б) $4^z : 2^z$ в) $(2^x 3^y 5^z) : (2^x 3^y 5^z)$

Имаме

а) $3^x 4^x = (3 \cdot 4)^x = 12^x$ б) $4^z : 2^z = \left(\frac{4}{2}\right)^z = 2^z$

в) $(8^x 9^y 15^z) : (2^x 3^y 5^z) = \left(\frac{8}{2}\right)^x \left(\frac{9}{3}\right)^y \left(\frac{15}{5}\right)^z = 4^x 3^y 5^z$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Како се дефинира степен со реален показател?

2. Изврши ги означените операции со степените:

а) $2^x 2^y$ б) $2^x : 4^x$ в) $12^x 11^x$ г) $(2^x 5^x)^y$

3. Спореди ги степените:

а) 3^x и $9^{x/2}$ б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$

4*. Кој од броевите е поголем во дадените неравенства, x или y?

а) $0{,}4^x > 0{,}4^y$ б) $1{,}4^x > 1{,}4^y$ в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$

5. Изврши ги операциите:

а) $(2^x+3^x)(2^x-3^x)$ б) $(5^x-5^{-x})^2$ в) $(4^x+1)^3$

3. 2. Експоненцијални равенки

Дефиниција 1. Равенки кај кои непознатата се наоѓа и во степеновиот показател се нарекуваат **експоненцијални равенки**.

1. Експоненцијални равенки се, на пример, равенките:

$2^x = 8,\quad 4^{x-3} = x-2,\quad 2{,}3^{x+3} = 5\cdot 3^x + 49$ и $x-\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3.$ ♦

Во продолжение ќе решиме некои видови експоненцијални равенки.

I. Равенки од видот A^x+m=0, A>0, A≠1, m<0

2. Реши ја равенката $3^x = 27.$

Дадената равенка $3^x = 27$ ја запишуваме во облик $3^x = 3^3$, при што добиваме равенка еквивалетна на дадената. Потоа ќе искористиме едно од својствата на степен на позитивен реален број a со реален показател, имено:

$a>0,\ a\neq 1,\ a^{x_1} = a^{x_2}$ ако и само ако $x_1 = x_2$.

Во таа смисла $3^x = 3^3$ ако и само ако $x=3$, од каде што заклучуваме дека равенката $3^x = 27$ има единствено решение $x=3.$ ♦

3. Реши ги равенките:

а) $4^x = \frac{1}{16}$ б) $5^x = 1$ в) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125}.$

а) $4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $4^x = 4^{-2}$, $x=-2$

б) $5^x = 5^0$, $x=0$

в) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3$, $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$, $x=-3.$ ♦

II. Равенки од видот $\mathbf{A^{f(x)}+m=0,\ A>0,\ A\neq 1,\ m<0}$

4. Реши ги равенките:

а) $3^{x+5}=81$

$3^{x+5}=3^4$

$x+5=4$

$x=-1$

б) $2^{3x-1}=32$

$2^{3x-1}=2^5$

$3x-1=5$

$x=2$

в) $3^{x^2}=81$.

$3^{x^2}=3^4$

$x^2=4$

$x=\pm 2$. ♦

III. Равенки од видот $\mathbf{a(A^{f(x)})^2+bA^{f(x)}+c=0}$

Со смената $A^{f(x)}=t$ ја добиваме квадратната равенка $at^2+bt+c=0$. За секое решение на квадратната равенка ја решаваме експоненцијалната равенка $A^{f(x)}=t$.

5. Реши ги равенките:

а) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$

$(2^2)^x-6\cdot 2^x+8=0$

смена $2^x=t$

$t^2-6t+8=0$

$t_1=8,\ t_2=2$

$2^{x_1}=8,\ \ 2^{x_2}=2$

$2^{x_1}=2^3,\ \ 2^{x_2}=2^1$

$x_1=3,\ \ x_2=1$

б) $16^x-3\cdot 4x+2=0$

$(4^2)^x-3\cdot 4x+2=0$

смена $4^x=t$

$t^2-3t+2=0$

$t_1=2,\ t_2=1$

$4^{x_1}=2,\ \ 4^{x_2}=1$

$2^{2x_1}=2^1,\ \ 2^{2x_2}=2^0$

$x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=0$

в) $12\sqrt[2x]{81}-\sqrt[x]{81}=27.$

$12\sqrt[2x]{81}-\left(\sqrt[2x]{81}\right)^2=27$

смена $\sqrt[2x]{81}=t$

$12t-t^2=27$

$t^2-12t+27=0$

$t_1=9,\ \ t_2=3$

$9^{\frac{1}{x_1}}=9^1,\ \ 3^{\frac{2}{x_2}}=3^1$

$x_1=1,\ \ \ x_2=2$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги равенките:

а) $9^x=\dfrac{1}{729}$ б) $5^x=\left(\dfrac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)^{10}$ в) $\left(\sqrt{10}\right)^x\cdot 0{,}1=1000$.

г) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-\dfrac{125}{64}=0$ д) $10^{\frac{4}{x}}=10^{x-3}$ ѓ) $4^x=\dfrac{81}{1296}$

2. Реши ги равенките:

а) $16^{x-0{,}5}=32^{14-x}$ б) $2\cdot 5^x=50$ в) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\dfrac{125}{64}=0$ г) $\dfrac{0{,}125}{4^{3-2x}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

3. Реши ги равенките:

а) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$ б) $49^x + 4\cdot 7^x - 5 = 0$ в) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$

4*. Реши ги равенките:

а) $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$ б) $15\cdot 2^{x+1} + 15\cdot 2^{-x+2} = 135$ в) $\dfrac{4^x + 1}{4^{x+1} - 2} = 2^{2x+1} - 1.$

5*. Реши ги равенките:

а) $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$ б) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$ в) $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$

3. 3. Поим за логаритам

Дефиниција 1. Нека $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $b \in \mathbb{R}^+$. Реалниот број x таков што $a^x = b$ се нарекува **логаритам** од b со основа a. Пишуваме $x = \log_a b$.

Според тоа, за $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

Непосредно од дефиницијата следува дека

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Бројот x се нарекува **логаритам**, бројот a се нарекува **основа на логаритамот**, а бројот b се нарекува **логаритмант**.

1. Провери ги вредностите во табелата.

Поими	$\log_2 8 = 3$	$\log_5 (m+3) = 2$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
Логаритам	3	2	4
Основа на логаритамот	2	5	$\frac{1}{3}$
Логаритмант	8	$m+3$	$\frac{1}{81}$

2. а) $\log_3 9 = 2$, бидејќи $3^2 = 9$ б) $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, бидејќи $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

в) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, бидејќи $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$. ♦

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 \frac{1}{4}$ б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ в) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}$.

а) Заради $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ добиваме дека $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;

Проверка: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

б) Од $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ следува дека $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

Проверка: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.♦

в) Од $3^{-2} = 3^{\frac{1}{7}}$ следува дека $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3} = -2$

Проверка: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}} = \sqrt[7]{3}$.♦

4. Најди го логаритмантот, ако основата е $\frac{1}{2}$ и логаритамот е 4.

Од $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ следува дека $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$. Значи, логаритмантот е $\frac{1}{16}$. ♦

5. Најди ја основата a ако $\log_a \frac{1}{8} = 3$.

Од дефиницијата за логаритам имаме $x^3 = \frac{1}{8}$, односно $x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Значи $x = \frac{1}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Прецртај ја во тетратката табелата и пополни ја:

Поими	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a(b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Логаритам					
Основа на логаритамот					
Логаритмант					

2. Најди ја вредноста на логаритмите:

а) $\log_3 \frac{1}{9}$ б) $\log_{0,1} 0{,}01$ в) $\log_3 \sqrt{3}$ г) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$.

3. Користејќи ја дефиницијата за логаритам, најди го x ако:

а) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ б) $\log_x 36 = 2$ в) $\log_5 x = 0$ г) $\log_x 125 = 5$.

4. Најди ја вредноста на изразите:

а) $5^{\log_5 2}$ б) $5^{2\log_5 3}$.

5. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_2 8 - \log_3 9$ б) $4\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

6*. За кои вредности на x изразот $\log_{0,2}(x^2 - x)$ има смисла?

3 . 4. Правила за логаритмирање

Нека $a > 0, a \neq 1, x > 0$ и $y > 0$.

I. Правило за логаритам од производ

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Доказ. Ако $\alpha = \log_a x$ и $\beta = \log_a y$, тогаш $a^\alpha = x$ и $a^\beta = y$. Од $x > 0$, $y > 0$ следува дека $xy > 0$, па според тоа постои $\log_a xy$. Тогаш имаме дека $a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$, од каде следува дека $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

1. $\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$. ♦

Правилото за логаритам од производ важи и во случај на конечно многу множители, односно за $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, важи

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$

II. Правило за логаритам од степен

$$\boxed{\log_a x^s = s\log_a x}$$

Доказ. Нека $\alpha = \log_a x$. Од $x > 0$ следува дека $x^s > 0$. Тогаш постои $\log_a x^s$. Заради $a^{\log_a x^s} = x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s\log_a x}$ добиваме дека $\log_a x^s = s\log_a x$. ■

2. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$. ♦

III. Правило за логаритам од количник

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Доказ. Знаејќи дека $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, од правилото за логаритам од производ и логаритам од степен имаме $\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$ ■

3. $\log_7 0{,}7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10.$ ♦

Како последица на правилата за логаритам со степен за $m,n \in \angle$, имаме:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a x.}$$

4. $\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\log_2 2 = \frac{5}{7}.$ ♦

Севкупноста од логаритмите од сите позитивни броеви, пресметани по иста основа, се вика **логаритамски систем**. Логаритмите пресметани со основа 10 се викаат **декадни логаритми**. Декадните логаритми ги запишуваме со $\log x,$ каде што основата 10 не се запишува. Често се користи и ознаката $\lg x,$ односно $\log_{10} x = \log x = \lg x.$ Логаритмите пресметани со основа e, каде $e \approx 2{,}71$ се викаат **природни логаритми**. Природните логаритми ги запишуваме со $\ln x,$ односно $\log_e x = \ln x.$ Правилата за логаритмирање важат и за декадните и за природните логаритми.

5. а) $\lg 10 = 1 \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2 \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4\lg 10 = 4$

б) $\ln e = 1 \quad \ln e^2 = 2\ln e = 2 \quad \ln e^4 = 4\ln e = 4$

в) $\lg 0{,}1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1 \quad \lg 0{,}001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$

г) $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \quad \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3.$ ♦

Од последната задача може да заклучиме дека логаритам од декадни единици поголеми од 1 е цел позитивен број и има онолку единици колку што има нули декадната единица, а логаритам од декадни единици помали од 1 е цел негативен број кој има онолку единици колку што има нули декадната единица.

Нека x е позитивен реален број за кој $\lg x$ е рационален број, односно $\lg x = k$, $k \in \mathbb{Q}$. Тогаш $x = 10^k$. Според тоа, декаден логаритам од позитивен број кој не е од обликот 10^k, $k \in \mathbb{Q}$ е ирационален број. Неговиот декаден запис има бесконечно многу децимали, па се покажува практичен договорот за заокружување на бројот на 5 децимали.

Ако A е кој било позитивен реален број, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, така што $10^{n-1} \leq A \leq 10^n$, од каде следува дека $\lg 10^{n-1} \leq \lg A \leq \lg 10^n$. Според дефиницијата за декаден логаритам имаме $n-1 \leq \lg A < n$. Од последното неравенство следува неравенството: $0 \leq \lg A - (n-1) < n$. Според тоа

$$\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}, \text{ каде што } n \in \mathbb{N} \text{ и } 0 \leq \alpha < 1.$$

Бројот n се вика **карактеристика**, а α се вика **мантиса** на логаритамот од бројот A. Со други зборови, целиот дел на логаритамот се нарекува карактеристика, а децималниот дел се нарекува мантиса на логаритамот. Според тоа, карактеристиката може да биде позитивен, негативен цел број или нула, додека мантисата е број меѓу 0 и 1.

6. Најди ја карактеристиката на $\lg 495{,}27$.

Заради $100 \leq 495{,}27 < 1000$ добиваме дека $\lg 100 \leq \lg 495{,}27 < \lg 1000$, односно $2 \leq \lg 495{,}27 < 3$. Според тоа, $\lg 495{,}27 = 2 + \alpha$, каде што $0 \leq \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 495{,}27$ е 2. ♦

7. Најди ја карактеристиката на $\lg 0{,}037$.

Од $0{,}01 < 0{,}037 < 0{,}1$, имаме $\lg 0{,}01 < \lg 0{,}037 < \lg 0{,}1$ или $-2 < \log A < -1$. Според тоа, $\lg 0{,}037 = -2 + \alpha$, каде што $0 \leq \alpha < 1$. Карактеристиката на $\lg 0{,}037$ е -2. ♦

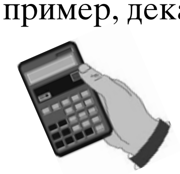
Од задачите 6 и 7 може да заклучиме дека карактеристиката на броевите поголеми од 1 е за еден помала од бројот на цифрите на целиот дел од неговиот запис, а карактеристиката на броевите помали од 1 е негативен број кој има онолку единици колку што има нули лево од првата цифра различна од нула.

8. Со помош на калкулатор можеме да пресметаме, на пример, дека

$\lg 24{,}257 = 1{,}38484$

$\lg 1278{,}13 = 3{,}10658$

$\lg 0{,}00257 = -2{,}59007$. ♦



9. Најди го декадниот логаритам од изразот $\dfrac{a^2 b}{c^4}$, ако $\lg a = m$, $\lg b = n$, $\lg c = p$.

$$\lg \frac{a^2 b}{c^4} = \lg a^2 b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p. \ ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Логаритмирај ги изразите:

а) $x=3ab$ б) $x=a^2bc^5$ в) $x=\dfrac{ab}{2c}$

г) $x=2(a-b)$ д) $x=\dfrac{\sqrt{a}}{b^2-c^2}$ ѓ) $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b^2}}$.

2. Упрости ги изразите:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3\log_3 4)$ б) $\log_3 64\log_2\dfrac{1}{27}$ в) $\log_2\log 100$

3. Најди го бројот x, ако е познат неговиот логаритам:

а) $\lg x=\lg 5-\lg 2+\log 4$ б) $\lg x=3\lg 2-2\lg 3$

в) $\lg x=\dfrac{1}{2}\lg 3+\dfrac{2}{3}\lg 5-\dfrac{1}{3}\lg 2$ г) $\lg x=\dfrac{1}{4}(2\lg 2-4\lg 3+5\lg 4)$.

д) $\ln x=\ln 5-\ln 3+\ln 1$ ѓ) $\ln x=3\ln 2-3\ln 3$

е) $\ln x=\dfrac{1}{3}\ln 3+\dfrac{1}{3}\ln 4-\dfrac{1}{3}\ln 2$ ж) $\ln x=\dfrac{1}{4}(2\ln 2+4\ln 3+5\ln 4)$.

4. Ако земеме дека $\lg 2\approx 0{,}30$ и $\log 3\approx 0{,}48$, најди приближната вредност на:

а) $\lg 4$, $\lg 6$, $\lg 8$, $\lg 9$ б) $\lg 12$, $\lg 16$, $\lg 18$.

5. Запиши ја карактеристиката на логаритмите:

а) $\lg(0{,}7545\cdot 0{,}0256\cdot 0{,}65^2)$ б) $\lg\dfrac{28{,}5\cdot 3{,}507}{0{,}457\cdot 0{,}0293}$

в)* $\lg\sqrt[5]{\dfrac{129}{9775}}$ г)* $\lg(0{,}85\cdot\sqrt[3]{0{,}55})$.

3. 5. Врски меѓу логаритми со различни основи

Нека $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ x>0.$

Правило за смена на основата на логаритам

$$\boxed{\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}}.$$

Доказ. Ако ги логаритмираме двете страни на равенството $x=a^{\log_a x}$ со логаритам со основа b добиваме дека $\log_b x=\log_b(a^{\log_a x})=\log_a x\cdot\log_b a$, односно $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.■

1. $\log_3 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 7 \cdot \dfrac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \dfrac{\log_3 9}{\log_3 6} =$

$= \log_3 9 = 2.$ ♦

Последица 1. Ако $x = b \neq 1,$ тогаш $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}.$

Доказ. Имаме $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}.$ ■

2. $\log_{32} 2 = \dfrac{1}{\log_2 32} = \dfrac{1}{5}.$ ♦

Последица 2. Ако $s \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,$ тогаш $\boxed{\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s}\log_a b}.$

Доказ. $\log_{a^s} b = \dfrac{1}{\log_b a^s} = \dfrac{1}{s\log_b a} = \dfrac{1}{s}\log_a b$. ■

3. $\log_{2^3} 4 = \dfrac{1}{3}\log_2 4 = \dfrac{1}{3} \cdot 2 = \dfrac{2}{3}.$ ♦

Последица 3. Ако $s \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,$ тогаш $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}.$

Доказ. Имаме $\log_{a^s} b^s = s\log_{a^s} b = s \cdot \dfrac{1}{s}\log_a b = \log_a b.$ ■

4. а) $\log_4 2^2 = \log_{2^2} 2^2 = \log_2 2 = 1$ б) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{3}}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_3 9 = 2.$ ♦

6. Ако земеме дека $\lg 2 \approx 0{,}30$ и $\lg 3 \approx 0{,}48$, може да пресметаме:

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{0{,}30 + 0{,}48}{1 - 0{,}30} = \frac{0{,}78}{0{,}70} = \frac{39}{35}. ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Искажи ја врската меѓу логаритмите со различни основи.

2. Докажи ги равенствата:

а) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

б) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \dfrac{1}{3}.$

3. Пресметај ја вредноста на изразот $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125.$

4. Упрости ги изразите:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$ б) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$ в) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}.$

5*. Докажи дека ако $a > 0,\ b \neq 1,\ b > 0,$ тогаш $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a.$

3. 6. Логаритамски равенки

Дефиниција 1. Равенки кај кои непознатата се наоѓа и во логаритмантот се нарекуваат **логаритамски равенки**.

1. Логаритамски равенки се, на пример, равенките:
$\log_2(x+4) = 7,\quad \log_{2x}(5+x^2) = 9,\quad \log_5(3x-2) = \log_5 x.$ ♦

Нека $a > 0,\ \ a \neq 1.$

I. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = b$

Од дефиницијата за логаритам следува еквивалентност на равенките:
$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x).$

2. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x+5) = 3$	б) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 7x + 13) = 0$	в) $\log_5(x^2-9)^2 = 2$
$x+5 = 3^3$	$x^2 - 7x + 13 = (\sqrt{3})^0$	$(x^2-9)^2 = 5^2$
$x+5 = 27$	$x^2 - x + 12 = 0$	$x^4 - 18x^2 + 56 = 0$
$x = 22$	$x_1 = -3$ и $x_2 = 4$	$x_{1,2} = \pm 2,\ \ x_{3,4} = \pm\sqrt{14}$

Ако за решавање на логаритамската равенка под в) го искористиме правилото за логаритам од степен добиваме:

$$\log_5(x^2-9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2\cdot\log_5(x^2-9) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x^2-9) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 5 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{14}.\ ♦$$

Добивме само две решенија на равенката, бидејќи неправилно го користевме правилото за логаритам од степен, односно равенството $\log_a b^2 = 2\log_a b,$ кое е точно само за $b > 0.$ Употребата на правилото за логаритам од степен ќе биде правилна ако запишеме:

$$\log_5(x^2-9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2\log_5\left|x^2-9\right| = 2 \Leftrightarrow \log_5\left|x^2-9\right| = 1 \Leftrightarrow \left|x^2-9\right| = 5.$$

II. Решавање на логаритамски равенки од видот $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решенијата на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ се добиваат со решавање на равенката $f(x) = g(x)$. Секое решение на равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ е решение на равенката $f(x) = g(x)$. Обратното во општ случај не важи, па затоа за добиените решенија на равенката $f(x) = g(x)$ ќе вршиме проверка во равенката $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

$x^2 - 7x + 11 = x - 4$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 5$

Проверка: $x = 3$

$\log_3(3^2 - 7\cdot 3 + 11) = \log_3(3 - 4)$

$\log_3(-1) = \log_3(-1)$

$x = 3$ не е решение

Проверка: $x = 5$

$\log_3(5^2 - 7\cdot 5 + 11) = \log_3(5 - 4)$

$\log_3 1 = \log_3 1$

Решение на дадената логаритамската равенка е $x = 5$.

б) $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$

$3x - 2 - 2x^2 = x^2 - 10x - 12$

$3x^2 - 13x - 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = -\frac{2}{3}$

Проверка: $x = 5$

$\lg(3\cdot 5 - 2 - 2\cdot 5^2) = \lg(5^2 - 10\cdot 5 - 12)$

$\lg(-37) = \lg(-37)$, не постои.

$x = 5$ не е решение

Проверка: $x = -\frac{2}{3}$

$$\lg\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 12\right\}$$

$\lg\left(-\frac{44}{9}\right) = \lg\left(-\frac{44}{9}\right)$, не постои.

Дадената логаритамската равенка нема реални решенија.♦

III. Решавање на равенки кои се сведуваат на равенки од видот $\log_a f(x) = b$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

4. Реши ги равенките:

а) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$ б) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x - 3)$

в) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

а) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$

$\log_3(x - 3)\cdot(2x + 1) = 2$

$2x^2 - 5x - 12 = 0$

Проверка: со замена за $x = 4$, а потоа за $x = -\frac{3}{2}$, добиваме дека равенката има само едно решение $x = 4$.

$x_1 = 4, x_2 = -\frac{3}{2}$

б) $\log_5(x^2-6x+7) = \log_5(x-3)$

$\log_5(x^2-6x+7) - \log_5(x-3) = 0$

$\log_5 \frac{x^2-6x+7}{x-3} = 0$

$\frac{x^2-6x+7}{x-3} = 1, x \neq 3$

$x^2-7x+10=0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
када $a>0, a\neq 1, x>0, y>0$

Проверка: со замена за $x=5$, а потоа за $x=2$, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x=5$.

в) $4-\lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$

Со замена $\sqrt{\lg 2x} = t$, имаме:

$4-t^2 = 3t$

$t^2+3t-4=0$

$t_1 = 1, t_2 = -4$

$\sqrt{\lg 2x} = 1$

$x = 5.$

Проверка: бидејќи равенката $\sqrt{\lg 2x} = -4$ нема решение, со замена за $x=5$, заклучуваме дека равенката има само едно решение $x=5$. ♦

5. Реши ги равенките:

а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7,$

$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7,$

$\frac{7}{4}\log_2 x = 7,$

$\log_2 x = 4,$

$x = 2$

Проверка: $\log_{16} 2 + \log_4 2 + \log_2 2 = 7$
Решението на равенката е $x=2$.

б) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1.$

$\log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1$

$\frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2\log_3 x} = 1$

$\log_3{}^2 x - 2\log_3 x + 1 = 0$

$\log_3 x = t$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$

$\log_3 x = 1$

$x = 3.$

Проверка: $\log_9 3 + \log_9 3 = 1$

$2\log_9 3 = 1,\ \log_9 9 = 1$

Решението на равенката е $x=3$.

в) $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1).$

$\lg 5 + \lg(x+10) - \lg 10 = \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$

$$\lg\frac{5(x+10)}{10}=\lg\frac{21x-20}{2x-1}$$
$$\frac{5(x+10)}{10}=\frac{21x-20}{2x-1}$$
$$5(x+10)(2x-1)=10(21x-20)$$
$$10x^2+95x-50=210x-200$$
$$x_1=10,\quad x_2=\frac{3}{2}.\ \blacklozenge$$

Проверка:
$$\lg 5+\lg 20-1=\lg 190-\lg 19$$
$$\lg 100-\lg 10=\lg 10$$
$$\lg 10^2=2\lg 10$$
$$2\lg 10=2\log 10$$
Решение на равенката е $x=10$.

Провери дали $x_2=\dfrac{3}{2}$ е решение на равенката?

Задачи за самостојна работа

Реши ги равенките:

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2-6)=2.$

2. $\log_3(x^2-5x+7)=1.$

3. $\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$

4. $\lg(3x-1)+\lg(12-x)=2.$

5. $\log_x 2-\log_x 3=4.$

6. $\log_2 x-\log_{16} x=3.$

7*. $\log_3(1+\log_3(2x-7))=1.$

3. 7. Задачи за вежбање

1. За кои реални броеви x и y, важи:

а) $8^x=8^y$ б) $\sqrt{3}^x>\sqrt{3}^y$ в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x>\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$?

2. Што е поголемо $a^{\frac{2}{3}}$ или $a^{\frac{3}{4}}$ ако:

а) $a>1$; б) $0<a<1$?

Реши ги равенките:

5. $16^{x-0,5}=32^{14-x}.$

6. $2\cdot 5^x=50.$

7. $4^x-6\cdot 2^x=-8.$

8. $\left(9^{x-1}\right)^{x-1}=9^{x-4}\cdot 3^{2x+4}.$

9. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\dfrac{125}{64}=0.$

10*. $4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}}=12.$

11. Со користење на дефиницијата за логаритам, најди го бројот x, ако:

а) $\log_x 16 = 2$ б) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$ в) $\log_x 1000 = -3$

г) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ д) $\log_{100} x = 0{,}2$ ѓ) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$

12. Логаритмирај ги следниве изрази:

а) $2xy$ б) $3x^2y^2$ в) $x^2y^5\sqrt{z}$ г) $a^{\sqrt{b}}c^3$

д) $6x\sqrt[3]{y^2}$ ѓ) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$ е)* $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

13. Најди го бројот x ако е познат неговиот логаритам.

а) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$ б) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$

в) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$ г) $\log x = 2\log 3 + 3\log 5$

14. Со примена на логаритам, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $x = \frac{333{,}648 \cdot 2{,}49}{125{,}36}$; б) $x = \frac{43{,}5 \cdot 0{,}26^2}{6{,}38^3 \cdot 1{,}28}$; в) $x = 3{,}25^3 \cdot \sqrt[5]{54{,}21}$.

15. Смени ја основата на:

а) $\log_2 5$ со 4 б) $\log_3 7$ со $\sqrt{7}$ в) $\lg 5$ со 10^{-1}.

16*. Упрости ги изразите, користејќи ги врските меѓу логаритмите со различни основи.

а) $\dfrac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \frac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2}$ б) $\log_2 \sqrt{x}(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1)$.

17. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$

б) $\log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84$.

Реши ги равенките:

18. $\lg x + \lg(x-3) = 1$. **19.** $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$.

20. $7\log_{25} x - \log_5 x = 5$. **21.** $\log_{x-1} 3 = 2$.

22. $\log_5(x-3) = \log_5(x^2 - 5x - 10)$. **23*.** $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.

4. **ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ**

4. 1. Тригонометриски функции од остар агол

Мерење на агли

Да се потсетиме, унијата од две полуправи со заеднички почеток и еден од деловите на кои тие полуправи ја делат рамнината се вика **агол.** Во таа смисла, две полуправи OA и OB со заеднички почеток одредуваат два агла, кои ги означуваме со $\angle AOB$ (или $\angle BOA$) или со грчките букви α, β, γ,.... Полуправите OA и OB се викаат **краци** на аголот AOB, а точката О негово **теме**.

Постојат различни начини за изразување на големината на аглите. До сега, како единица мерка за мерење агли го користевме **степенот**. **Еден степен (1°)** е единица мерка за мерење агли дефинирана како $\frac{1}{360}$ дел од полниот агол. Помали единици мерки се **една минута (1')** која е дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од еден степен и **една секунда (1'')** дефинирана како $\frac{1}{60}$ дел од една минута, односно $\frac{1}{3600}$ дел од еден степен. Користејќи ги овие односи можеме да претвораме степени, минути, секунди во децимален облик на степени.

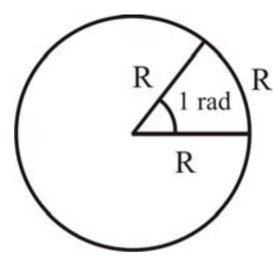
1. Претвори го аголот од $14^0\,36'\,54''$ во децимален облик.

$$14^0\,36'\,54'' = 14^0 + \left(\frac{36}{60}\right)^0 + \left(\frac{54}{3600}\right)^0 = 14^0 + 0{,}6^0 + 0{,}015^0 = 14{,}615^0. \ \blacklozenge$$

2. Претвори го аголот $72{,}568^0$ во степени, минути и секунди.

$$72{,}568^0 = 72^0 + (0{,}56\cdot 60)' = 72^0 + 33{,}9' = 72^0 + 33' + (0{,}9\cdot 60)'' = 72^0 + 33' + 54'' = 72^0\,33'\,54''.$$

Во продолжение ќе воведеме нова единица мерка за мерење агли. Имено, големината на централен агол во кружница чиј соодветен лак има должина еднаква на должината на радиусот на таа кружница, се нарекува **еден радијан** и се означува со **1 rad**. (црт. 1).



Црт. 1

Да ја утврдиме врската меѓу двете единици мерки за мерење на агли, степен и радијан.

Бидејќи должината на кружница со радиус R е $2R\pi$, полниот агол, кој е централен агол на целата кружница, има големина $2\pi\,rad$. Од друга страна, полниот агол има големина 360^0, па според тоа $360^0 = 2\pi\,rad$. Од последното следува дека

$$1rad = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}29578^0 \approx 57^0\,17'\,45'' \text{ и } 1^0 = \frac{\pi}{180}rad \approx 0{,}01745rad.$$

3. а) Изрази ги во радијани аголот $100^0 11^{'} 15^{''}$.

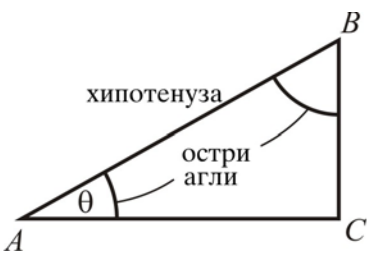
$$100^0 11^{'} 15^{''} = 100 \cdot \frac{\pi}{180} + 11 \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} + 15 \cdot \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1{,}7\,rad$$

б) Изрази ги во степени аголот $\frac{5\pi}{12}$.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 75^0. \ \blacklozenge$$

• Множи ги степените со $\frac{\pi}{180}$, за да претвориш во радијани.
• Множи ги радијаните со $\frac{180^0}{\pi}$, за да претвориш во степени.

Синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол



Црт. 2

Ќе преминеме на дефинирањето на четирите тригонометриските функции од остар агол, со помош на правоаголен триаголник.

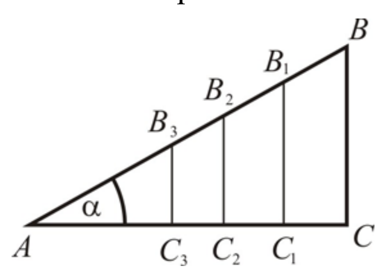
Во триаголникот ABC (црт. 2) аголот при темето C е прав агол, а двата агли при темињата A и B се остри агли.

Ако го означиме со θ остриот агол при темето A тогаш страната BC се вика **спротивна** катета, а страната AC **прилегната** катета за аголот θ.

Да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC и отсечки B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 кои се нормални на страната AC (црт. 3). Тие отсечки се катети на правоаголните триаголници AB_1C_1, AB_2C_2 и AB_3C_3 кои имаат заеднички агол α со правоаголниот триаголник ABC. Правоаголните триаголници се слични, па соодветните страни им се пропорционални, односно:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}; \quad \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};$$

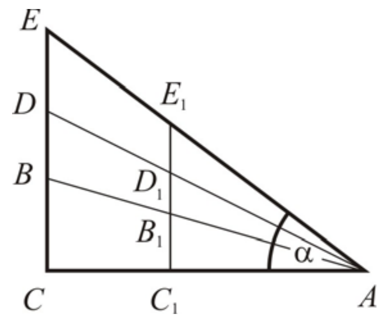
$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ и } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$



Црт. 3

Значи, за даден агол α, односите помеѓу должините на соодветните страни на правоаголните триаголници од црт. 3 се константни.

Но, ако се промени големината на аголот α тогаш ќе се промени и вредноста на односите. За да дојдеме до овој заклучок, доволно е да ги разгледаме правоаголните триаголници AB_1C_1, AD_1C_1 и AF_1C_1 (црт. 4). Овие триаголници не се слични, па затоа односите на соодветните страни не се еднакви, односно $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} \neq \frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{A_1C_1}}$ и така натаму. Значи промената на аголот α влијае на промената на вредноста на односот на должината на соодветните страни. Така може да заклучиме дека односот од должината на две страни во правоаголен триаголник, зависи од големината на остриот агол на тој триаголник. Ако е дадена вредноста на аголот, може да се одреди вредноста на односот на страните и обратно, ако е дадена вредноста на било кој од претходните односи, може да се одреди големината на остриот агол. Значи помеѓу острите агли во правоаголен триаголник и односите на должините на неговите страни постојат функции. Затоа тие односи добиле и посебни имиња:



Црт. 4

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ се нарекува **синус** на аголот и се означува $\sin\alpha$**,** односно $\sin\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ се нарекува **косинус** на аголот и се означува $\cos\alpha$, односно $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$;

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ се нарекува **тангенс** на аголот, и се означува $tg\alpha$, односно $tg\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ и

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ се нарекува **котангенс** на аголот и се означува $ctg\alpha$, односно $ctg\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Претходно дефинираните функции кои ја опишуваат зависноста помеѓу должините на страните во правоаголен триаголник и неговите остри агли се викаат **тригонометриски функции.** Тие функции се искажуваат и на следниот начин:

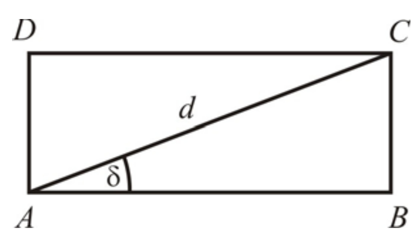
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{хипотенуза}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{спротивна катета за } \alpha}{\text{прилегната катета за } \alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилегната катета за } \alpha}{\text{спротивна катета за } \alpha}$$

4. Најди ги тригонометриските функции на остриот агол δ во правоаголникот $ABCD$ на црт. 5.

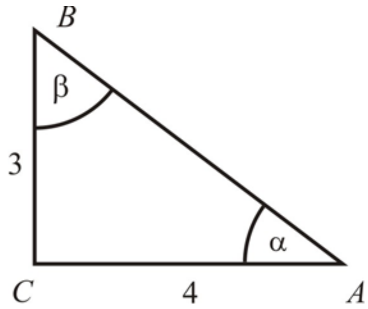
Од правоаголниот триаголник ABC имаме дека:

$\sin\delta = \dfrac{b}{d}$, $\cos\delta = \dfrac{a}{d}$, $tg\delta = \dfrac{b}{a}$, $ctg\delta = \dfrac{a}{b}$. ♦



Црт. 5.

5. Даден е правоаголен триаголник чии катети се 3 *cm* и 4 *cm*. Најди ги тригонометриските функции од острите агли (црт. 6).



Црт. 6

Според Питагоровата теорема ја наоѓаме хипотенузата

$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$ односно $c = 5.$

Тогаш

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\alpha = \frac{3}{4} \qquad ctg\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad tg\beta = \frac{4}{3} \qquad ctg\beta = \frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Тригонометриските функции синус и косинус се дефинираат и за нултиот и правиот агол со:

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Исто така се дефинира $tg0 = 0,$ $ctg\frac{\pi}{2} = 0,$ додека $tg\frac{\pi}{2}$ и $ctg0$ не се дефинирани.

Задачи за самостојна работа

1. Прецртај ја и пополни ја табелата.

Степени	0^0	30^0		60^0		180^0		360^0
Радијани			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Најди ги тригонометриските функции на аголот β во правоаголен триаголник ако се дадени двете катети a и b.

2. $a = 5,\ \ b = 12;$ **3.** $a = 3,\ \ b = 5{,}2.$

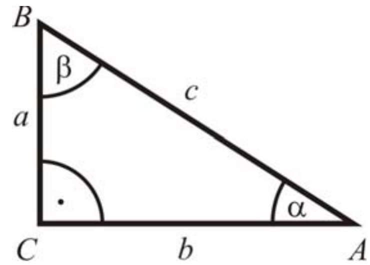
Најди ги тригонометриските функции на аголот α во правоаголен триаголник ако се дадени катетата a и хипотенузата c:

4. $a = 8,\ \ c = 10;$ **5.** $a = 9{,}8,\ \ c = 12{,}6.$

4. 2. Пресметување на вредностите на тригонометриските функции од некои агли

При решавањето на разни проблеми во геометријата се користат тригонометриските функции на аглите 30°, 45° и 60°. За пресметување на тригонометриските функции на овие агли ќе ги користиме и својствата на тригонометриските функции од комплементни агли.

Да се потсетиме дека два агли се нарекуваат комплементни ако нивниот збир е прав агол. Двата остри агли во правоаголен триаголник се комплементни агли. Зошто? Ако α е еден од острите агли правоаголниот триаголник ABC (црт. 7), тогаш аголот $\beta = 90^0 - \alpha$ е нековиот комплементен агол. Ако аголот α е даден во радијани, тогаш $\frac{\pi}{2} - \alpha$ е неговиот комплементен агол. Понатаму, страната a е спротивна катета за аголот α, а прилегната за аголот β, додека страната b е прилегната катета за аголот α, а спротивна за аголот β. Според тоа, за тригонометриските функции од аглите α и β (при што $\alpha \neq 0^0$ и $\beta \neq 0^0$), имаме:



Црт. 7

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = ctg\beta, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a} = tg\beta, \text{ односно}$$

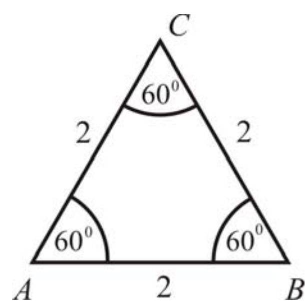
$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha), \quad tg\alpha = ctg(90 - \alpha), \quad ctg\alpha = tg(90^0 - \alpha).$$

1. На пример, $\cos 70^0 = \sin(90^0 - 70^0) = \sin 20^0$; $\sin 10^0 = \cos(90^0 - 10^0) = \cos 80^0$;

$tg\frac{\pi}{6} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = ctg\frac{\pi}{3}$; $\quad ctg\frac{\pi}{6} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{3}$. ♦

Да го разгледаме рамностраниот триаголник ABC со страна долга 2 единици (црт. 8). Висината AD спуштена од темето A, претставува во исто време бисектриса на аголот при темето A, како и симетрала на спротивната страна BC. Значи,

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \text{и} \quad \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle CAB) = \frac{1}{2}(60^0) = 30^0.$$



Црт. 8

Со примена на Питагорова теорема за правоаголниот триаголник ABD (црт. 9) добиваме

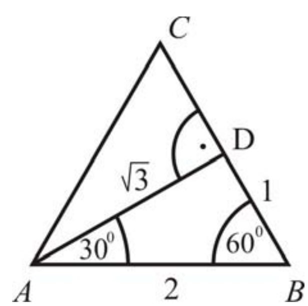
$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 \text{ или } \overline{AD}^2 + 1^1 = 2^2.$$

Според тоа $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, односно $\overline{AD} = \sqrt{3}$.

Сега можеме да ги пресметаме тригонометриските функции на аглите во правоаголниот триаголник ABD:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2};$$

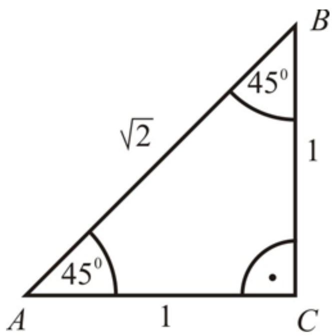
$$\cos 30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



Црт. 9

$$tg30^0=\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}};\qquad tg30^0=ctg60^0=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$ctg30^0=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3};\qquad ctg30^0=tg60^0=\sqrt{3}.$$



Црт. 10

За да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции од 45^0 конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со страна долга 1 единица. (црт. 10). Неговите остри агли се по 45^0.

Според Питагоровата теорема за хипотенузата имаме дека $|AB|=\sqrt{2}$. Од дефиницијата на тригонометриските функции следува дека:

$$\sin 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0 \quad \text{и} \quad tg45^0=\frac{1}{1}=1=ctg45^0.$$

Добиените вредности за тригонометриските функции ги претставуваме во табела:

Степени	Радијани	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

2. Пресметај ја вредноста на изразот $\cos 45^0\cdot\cos 30^0-\sin 45^0\cdot\sin 30^0$.

$$\cos 45^0\cdot\cos 30^0-\sin 45^0\cdot\sin 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\ \blacklozenge$$

4. Најди ја бројната вредност на изразот $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin\alpha}$ за $\alpha=30^0$.

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos 2\cdot 30^0}{1+\sin 30^0}=\frac{\cos 60^0}{1+\sin 30^0}=\frac{\cos 60^0}{1+\cos 60^0}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај:

а) $\cos 57^0$ преку $\sin 33^0$; б) $\sin 77{,}77^0$ преку $\cos 12{,}23^0$;

в) $ctg\frac{5\pi}{18}$ преку $tg\frac{2\pi}{9}$; г) $tg\left(\frac{\pi}{2}-1{,}087\right)$ преку $ctg 1{,}0785$.

2. Пресметај го аголот α ако се знае дека:

а) $\cos(\alpha+10^0)=\sin 20^0$; б) $tg 35^0 = ctg(\alpha-15^0)$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin^2 30^0+\cos^2 30^0$; б) $\frac{\sin 30^0+1}{1+\cos 60^0}$; в) $\frac{tg 30^0+ctg 45^0}{ctg 60^0+tg 45^0}$.

4. Пресметај:

а) $2\cdot\cos 30^0\cdot\cos 45^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$; б) $\sin^2 30^0+tg^2 60^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$.

5*. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0}$; б) $\frac{ctg 60^0+tg 45^0}{1-tg 60^0\cdot tg 45^0}$; в) $\frac{4\sin^2 45^0+1}{ctg^2 30^0}$.

6. Пресметај ја вредноста на аголот α ако:

а) $tg\alpha=1$; б) $ctg\alpha=\sqrt{3}$;

в) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; д) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 3. Пресметување на вредностите на тригонометриските функции со калкулатор

Видовме дека за аглите 0^0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$ лесно е да се најдат точни вредности за тригонометриските функции. Во случај кога тоа не е можно нивните приближни вредности ги наоѓаме со таблици или со калкулатор.

Калкулаторите најчесто имаат посебно копче за конверзија на степени, минути и секунди во децимални степени. Тоа копче најчесто е означено со ($\boxed{\text{° ' ''}}$) или ($\boxed{\text{DMS}}$) (според degrees - minutes - seconds).

Доколку сакаме да го претвориме аголот $32^0 45' 10''$ во степен постапуваме на следниот начин: запишуваме 32, па го притискаме копчето; внесуваме 45, го притискаме копчето; внесуваме 10 и по третпат го притискаме копчето. Добиениот резултат е $32{,}7527778^0$.

Ако сакаме да претвориме агол даден во децимален степен во степени, минути и секунди, тогаш го користиме и копчето означено најчесто со жолта боја на кое пишува $\boxed{2^{ndf}}$ или $\boxed{\text{inv}}$, со кое се прави инверзија на соодветна операција. После внесувањето на децималниот број, прво се притиска копчето за инверзија, а потоа копчето $\boxed{^{\circ}\ '\ ''}$.

Исто така, калкулаторите најчесто имаат две состојби, едната во која се работи со агли во децимални степени, означена со *deg*, а другата во која се работи со агли во радијани, означена со *rad*. Менувањето од една во друга состојба е со притискање на соодветно копче.

Со помош на калкулатори се наоѓаат тригонометриските функции од дадени агли, а и обратно, за дадена тригонометриска функција се наоѓа соодветниот агол. Овие постапки ќе ги разгледаме на следниве два примера.

1. Пресметај со помош на калкулатор:

а) $\sin 41{,}3^0$; б) $\cos 19^0\,21^{'}17^{''}$; в) $tg\,\frac{5\pi}{36}$.

а) На почеток го ставаме калкулаторот во состојба за пресметување на агли во децимални степени и се внесува вредноста $41{,}3^0$. Потоа го притискаме копчето означено со $\boxed{sin}$, со што се добива бараната вредност $\sin 41{,}3^0$.

$41{,}3^0 \longrightarrow \boxed{sin} = 0{,}660017.$

б) На почеток потребно е аголот $19^0\,21^{'}17^{''}$ да се претвори во децимална форма, а потоа следува постапката како под а).

$$19^0\,21^{'}17^{''} = 19^0 + \left(\frac{21}{60}\right)^0 + \left(\frac{17}{3600}\right)^0 = 19{,}354722^0;$$

$19{,}354722^0 \longrightarrow \boxed{cos} = 0{,}943484853.$

в) Во овој случај го ставаме калкулаторот во состојба за пресметување на агли во радијани. Потоа го притискаме копчето $\boxed{\pi}$ (со што се внесува вредност 3,141592654), множиме со 5, делиме со 36 и на крај притискаме на копчето тангенс ($\boxed{tan}$) со што го добиваме бараниот резултат:

$$tg\,\frac{5\pi}{36} = 0{,}466307658.\ \blacklozenge$$

2. Со помош на калкулатор најди го аголот α ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}74281$; б) $\cos\alpha = 0{,}23849$; в) $tg\alpha = 3{,}8611$.

а) Нека калкулаторот е во состојба *deg*. Се внесува вредноста на $\sin\alpha = 0{,}74281$, се притиска копчето $\boxed{inv}$ (или $\boxed{2^{ndf}}$), а потоа се притиска копчето со $\boxed{sin}$. Добиениот резултат е аголот $\alpha = 47{,}9713^0$.

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{sin} = 47{,}9713^0.$

со претворање во степени, се добива $\alpha = 57^0 58' 17''$.

Ако калкулаторот има копче $\boxed{sin^{-1}}$, тогаш постапката е следната:

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{sin^{-1}} = 47{,}9713^{\,0}.$

б) $0{,}23849 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{cos} = 76{,}2026^0$; $\alpha = 76^0 12' 9''$.

в) $3{,}82611 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{tg} = 75{,}3527^0$; $\alpha = 75^0 21' 10''$. ♦

Задачи за самостојна работа

Со помош на калкулаторот пресметај ги тригонометриските функции за секој од аглите:

1. а) 48^0; б) $23^0 12' 23''$; в) $16{,}19^0$.

2. а) $\frac{2\pi}{7}$; б) $\frac{5\pi}{21}$.

3. Со помош на калкулатор, најди го остриот агол α ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}58362$; б) $\cos\alpha = 0{,}71419$; в) $tg\alpha = 2{,}4183$;

г) $\sin\alpha = \frac{4}{9}$; д) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$; ѓ) $ctg\alpha = \frac{4}{13}$.

4. За $\alpha = 34^0 28'$, пресметај:

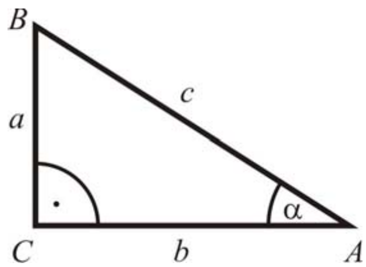
а) $\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}$; б) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$.

5*. Пресметај го аголот α ако:

а) $\sin\alpha = tg\,23^0 37'$; б) $\cos\alpha = 5\cdot\sin 11^0$; в) $tg\alpha = \sin 32^0 19' + \cos 59^0 25'$.

4. 4. Врска меѓу тригонометриските функции од ист агол

Познато е дека во правоаголен триаголник ABC (црт.11) важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$. Ако тоа равенство се подели со c^2 се добива $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$, односно $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$. Според тоа имаме дека



Црт. 11

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Бидејќи $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ и $\frac{b}{c}=\cos\alpha$, со замена во последното равенство, добиваме

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (1)$$

1. На пример, за $\alpha=30^0$, имаме дека

$$\sin^2 30+\cos^2 30=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1. \ \blacklozenge$$

Со користење на равенството (1) можеме да ја изразиме функцијата синус од произволен остар агол преку функцијата косинус од тој агол и обратно, односно:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .$$

2. Пресметај го $\cos\alpha$, ако $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}. \ \blacklozenge$$

3. Упрости го изразот $(1+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)$.

Со овој пример ќе покажеме како равенството (1) може да се искористи за упростување на изрази. Имено:

$$(1+\cos\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha. \ \blacklozenge$$

За правоаголниот триаголник ABC (црт. 11) имаме дека:

$$tg\alpha=\frac{a}{b} \ \text{ и } \ ctg\alpha=\frac{b}{a}$$

Ако ги поделиме броителот и именителот на десните страни од овие равенства со c ($c\neq 0$ c $\neq 0$) добиваме

$$tg\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad \text{и} \quad ctg\alpha=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \qquad (2)$$

Ако се помножат $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ добиваме уште едно равенство

$$\boxed{tg\alpha\cdot ctg\alpha=1} \qquad (3)$$

4. Со директно пресметување се добива дека

$tg60^0 \cdot ctg60^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. ♦

5. Пресметај го $tg\alpha$, ако $ctg\alpha = 2$.

Од $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{2}$ добиваме дека $tg\alpha = \frac{1}{2}$. ♦

Со помош на основните врски меѓу тригонометриските функции од остри агли дадени со равенствата (1), (2) и (3), ако е позната вредноста само на една од нив, може да се пресметаат вредностите на останатите три од тие функции.

6. Ако $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, пресметај колку е $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}. \ ♦$$

7. Ако $tg\alpha = 2$, пресметај ги останатите тригонометриски финкции на аголот α.

Од равенката $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ следува дека $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, односно $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Од друга страна $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, па $(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha = 1$. Според тоа $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$, односно $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Понатаму се пресметува дека

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ и } ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2}. ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги останатите тригонометриски функции ако е дадено:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; б) $\cos\alpha = 0{,}25$; в) $tg\alpha = \frac{4}{5}$; г) $ctg\alpha = 0{,}41$.

2. Упрости ги изразите:

а) $1-\cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha - 1$; в) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

3. Докажи дека:

а) $\sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha = 1$; б) $\sin^2\alpha \cdot \left(1+ctg^2\alpha\right) + \cos^2\alpha \cdot \left(1+tg^2\alpha\right) = 2$.

4. Докажи дека за секој остар агол α важи:

а) $tg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha = tg^2\alpha - \sin^2\alpha;$ б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1;$

в) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = tg\alpha - ctg\alpha;$

5*. Докажи дека за секој остар агол α важи:

а) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin^2\alpha};$ б) $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2.$

6. Ако $\cos\alpha=\dfrac{15}{17}$, пресметај $\dfrac{5\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}$.

7. Пресметај ја вредноста на изразот $4tg\alpha-3\sin\alpha$ ако $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

4. 5. Решавање на правоаголен триаголник

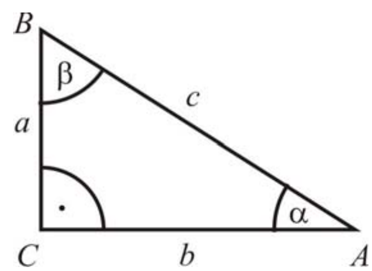
Нека a, b и c се страни на правоаголен триаголник ABC (црт. 12), а α и β се неговите остри агли. Тогаш

$$\alpha+\beta=90^0 \text{ и } a^2+b^2=c^2.$$

Освен тоа од дефиницијата на тригонометриските функции имаме:

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha, \quad \frac{b}{c}=\cos\alpha, \quad \frac{a}{b}=tg\alpha$$

$$\frac{a}{c}=\cos\beta, \quad \frac{b}{c}=\sin\beta, \quad \frac{a}{b}=ctg\beta$$



Црт. 12

Овие релации ќе ги користиме за пресметување на основните елементи на правоаголниот триаголник (неговите страни и агли) во случај кога е дадена:

- една страна и еден остар агол;
- две страни.

Да се реши правоаголен триаголник значи да се пресметаат сите негови основни елементи врз основа на дадените елементи, од кои барем еден е страна.

1. Да се реши правоаголен триаголник со хипотенуза $c=93cm$ и агол $\alpha=42^0 23'$.

Треба да ги пресметаме двете катети a и b и остриот агол β.

Аголот може веднаш да се пресмета: $\beta=90^0-\alpha=90^0-42^0\,23'=47^0\,37'$.

За да ја пресметаме катетата a, првин пресметуваме $\sin 42{,}3833^0=0{,}67409$, а потоа од $a=c\cdot\sin\alpha=93\cdot 0{,}67409\approx 63$ наоѓаме дека $a\approx 63cm$. Катетата b може да ја пресметаме со помош на хипотенузата и косинусот од аголот α или со примена на Питагоровата теорема.

I начин. $b = c\cdot\cos\alpha = 93\cdot\cos 42{,}3833^0 = 93\cdot 0{,}73865$, односно $b \approx 69cm$.

II начин. $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69cm$. ♦

2. Да се реши правоаголен триаголник со катети $a = 21cm$ и $b = 15cm$.

Треба да се пресмета хипотенузата и двата остри агли. Хипотенузата ќе ја пресметаме со примена на Питагоровата теорема:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25cm$.

Аголот α ќе го одредиме со помош на функцијата тангенс. Од $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$ пресметуваме дека $\alpha \approx 54^0\,28'$. За аголот β имаме дека: $\beta = 90^0 - \alpha \approx 90^0 - 54^0 28'$, односно $\beta \approx 35^0 32'$. ♦

3. Да се реши правоаголен триаголник со катетата $b = 53\ cm$ и агол $\beta = 64^0$.

Според условите на задачата треба да го пресметаме другиот остар агол, катетата и хипотенузата. Пресметуваме: $\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 64^0 = 26^0$;
$a = b\cdot tg\alpha = 53\cdot tg 26^0 = 53\cdot 0{,}48773 \approx 26$, односно $a \approx 26cm$. Од $b = c\sin\beta$ имаме дека, $c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0{,}89879}$, односно $c \approx 59\ cm$. ♦

4. Да се реши правоаголен триаголник со катета $a = 37cm$ и хипотенуза $c = 48cm$.

Треба да се пресметаат острите агли α и β и катетата b.

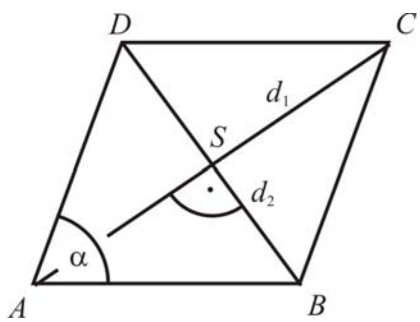
Од $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0{,}77083$ имаме дека $\alpha \approx 50{,}42878^0$, односно $\alpha \approx 50^0\,25'\,44''$ и $\beta = 90^0 - \alpha \approx 39^0\,34'\,16''$. Од $b = c\cdot\sin\beta = 48\cdot\sin 39^0\,34'\,16'' \approx 48\cdot 0{,}63704 \approx 31$ наоѓаме дека $b \approx 31cm$. ♦

Решавањето на правоаголниот триаголник наоѓа голема примена во решавањето на задачи од областа на планиметријата, но и од секојдневниот живот. Таквата примена ќе ја илустрираме со неколку примери.

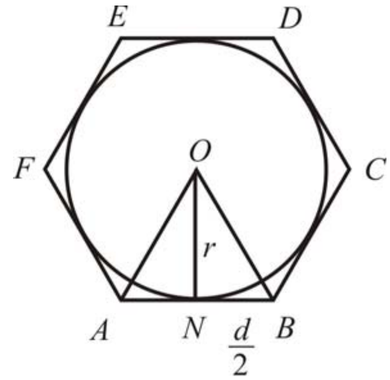
5. Пресметај ја страната на ромб ако е даден неговиот остар агол $\alpha = 66^0$ и една дијагонала $d_1 = 34cm$.

Нека се дадени аголот α кај темето A и дијагоналата d_1 повлечена од тоа теме (црт. 13). Од правоаголниот триаголник *ABS* имаме

$$\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}; \quad 17 = a \cdot \cos 33^0; \qquad a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0{,}83863} \approx 203\,cm. \ \blacklozenge$$



Црт. 13



Црт. 14

6. Пресметај ја страната на правилен шестоаголник ако е познат радиусот на опишаната кружница $r = 12\,cm.$

На цртеж 14 е нацртан правилен шестоаголник $ABCDEF$. Триаголникот ABO е рамностран. Аголот BON е 30^0. Од правоаголниот триаголник NBO следува дека:

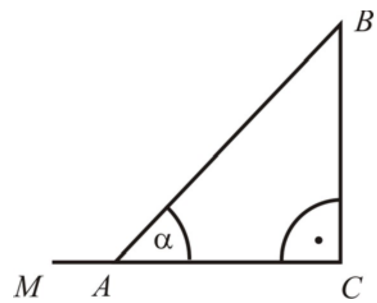
$$\frac{a}{2} = r \cdot tg30^\circ \approx 12 \cdot 0{,}57735 \approx 6{,}9282; \quad a \approx 13{,}85cm. \ \blacklozenge$$

7. Пресметај го растојанието меѓу точките A и B кои се наоѓаат на различните страни од една река (црт. 15).

Во точката A конструираме прав агол BAM. На крајот од тој агол земаме точка C и го мериме аголот ACB. Нека големината на тој агол е $\alpha = 49^0$. Го мериме растојанието меѓу точките A и C и нека тоа е $d = 28\,m.$ Тогаш имаме

$$\overline{AB} = d \cdot tg\alpha = 28 \cdot tg49^0 \approx 28 \cdot 1{,}15037 \approx 32,$$

$$\overline{AB} \approx 32\,m. \ \blacklozenge$$



Црт. 15

Задачи за самостојна работа

Да се реши правоаголен триаголник ABC ако:

1. а) $\alpha = 36{,}2^0$, $c = 68\,cm$; б) $\beta = 15{,}8^0$, $c = 12{,}2\,cm$; в) $\beta = 65{,}4^0$, $a = 2{,}25\,cm.$

2. а) $\alpha = 82^0$, $b = 246\,cm$; б) $\beta = 48^0\,30'$, $b = 74{,}7\,cm$; в) $\alpha = 24^0$, $a = 5{,}25\,cm.$

3. а) $a = 230\,cm$, $c = 320\,cm$; б) $a = 52{,}5\,cm$, $b = 28\,cm$; в) $b = 3{,}9\,cm$, $c = 4{,}5\,cm.$

4. Радиусот на кружницата е $13cm$, должината на тетивата AB е $10cm$. Пресметај ја големината на аголот AOB.

5. Висината на рамнокракиот трапез е $6cm$, а основите имаат должини $4cm$ и $20cm$, соодветно. Пресметај ги аглите на трапезот.

6*. Над местото A се наоѓа авион на висина од 4000 метри. Во тој момент од него се гледа местото B под агол од 17º. На колкаво растојание се наоѓа авионот од местото B и колкаво е растојанието меѓу местата A и B?

4. 6. Задачи за вежбање

1. Претвори ги во степени, минути и секунди аглите:
а) $34{,}41^0$; б) $18{,}27^0$; в) $23{,}67^0$.

2. Претвори ги во децимални степени аглите:
а) $36^0\,25'\,36''$; б) $45^0\,11'\,19''$; в) $73^0\,52'\,25''$.

3. Претвори ги во радијани аглите:
а) 25^0; б) $62^0\,15'$; в) $35^0\,5'\,38''$.

4. Претвори ги во степени аглите дадени во радијани:
а) $\dfrac{7\pi}{12}$; б) 1,27; в) 0,45.

5. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $\dfrac{\sin 30^0 - \cos 30^0}{5ctg60^0 tg30^0}$; б) $\dfrac{tg45^0}{2\cos^2 30^0 - 1}$; в) $\dfrac{tg\alpha \cdot ctg\alpha}{1-\cos\alpha}$, за $\alpha \neq 0$.

6. Најди го аголот α за кој:
а) $\sin\alpha = \cos 65^0$; б) $\cos\alpha = \sin 42^0\,50'$;
в) $\sin(\alpha + 20^0) = \sin 50^0$; г) $tg(\alpha - 15^0) = ctg(\alpha + 25^0)$.

7. Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски функции, ако е дадено:
а) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; в) $tg\alpha = \dfrac{3}{5}$; г) $ctg\alpha = \dfrac{7}{25}$.

8. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $4tg\alpha + 5\cos\alpha$, ако $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; б) $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, ако $tg\alpha = 2$.

9. Реши го правоаголниот триаголник *ABC*, ако се дадени:

а) $\alpha = 36^0\,2'$, $c = 68$; б) $\beta = 64^0\,20'$, $a = 450$; в) $\beta = 85^0\,10'$, $b = 0{,}62$;

г) $a = 230$, $c = 320$; д) $b = 3{,}9$, $c = 42{,}5$.

10. Во рамнокрак трапез, познати се основата a, кракот c и аголот α при основата. Пресметај ги другата основа и висината на трапезот.

11*. Аголот под кој се гледа светилникот од патувачки брод изнесува $25{,}6^o$. Откако бродот се доближил за 1050 метри до копното, аголот изнесува $31{,}2^o$. На која висина е поставен светилникот, мерејќи од нивото на водата.

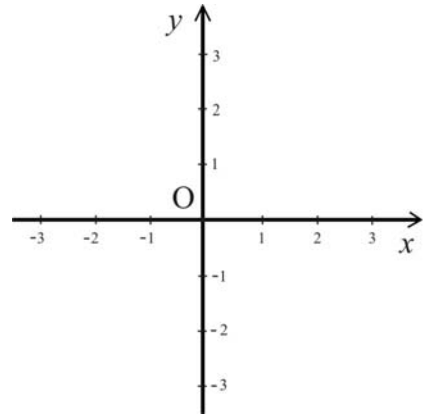
5. ПРАВА ВО РАМНИНА

5. 1. Правоаголен координатен систем во рамнина

Положбата на секоја точка на бројната права е еднозначно определена, со единствен реален број x, наречен **координата на точката**. Слично, користејќи правоаголен координатен систем ќе покажеме дека положбата на секоја точка во рамнината е еднозначно определена, со единствен подреден пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати на точката**.

Правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски, наречени **координатни оски**. Точката во која се сечат двете оски се вика **координатен почеток** и вообичаено се означува со O. Хоризонталната оска се вика $x-$оска или **апсцисна оска**, додека вертикалната оска се вика $y-$оска или **ординатна оска**. Рамнината во која е определен координатен систем се вика координатна рамнина.

Вообичаено, на двете координатни оски избираме една иста единица мерка. Како позитивна насока се зема насоката надесно од координатниот почеток, а на ординатната оска нагоре од координатниот почеток (црт. 1).



Црт. 1

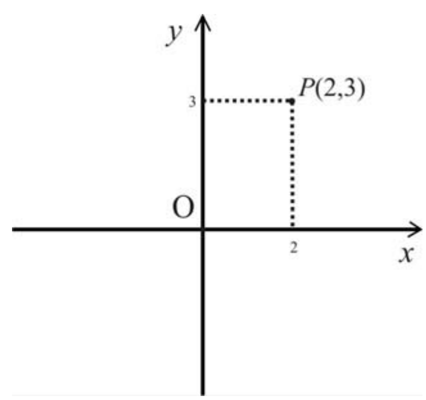
Нека P е произволна точка во координатната рамнина и нека M и N се нејзините проекции на $x-$оската и $y-$оската, соодветно. На точката M на $x-$оската одговара точно еден реален број x. Слично, на точката M на $x-$оската одговара точно еден реален број y. Според тоа положбата на точката P е наполно определена со подредениот пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати** на точката P. Притоа, x се вика **прва координата** или **апсциса**, а y **втора координата** или **ордината** на точката P и запишуваме $P(x, y)$.

1. Точката $P(-3,6)$ има прва координата $x=-3$ и втора координата $y=6$. ♦

Да се конструира, односно да се нацрта точка $P(x, y)$, значи да се определи пресечната точка на нормалите на координатните оски кои минуваат низ точката P.

2. Конструирај ја точката $P(2,3)$.

Цртаме нормала на $x-$оската низ точката со координата 2. Слично, цртаме нормала на $y-$оската низ точката со координата 3. Пресечната точка на нормалите е бараната точка (црт. 2). ♦



Црт. 2

Црт. 3

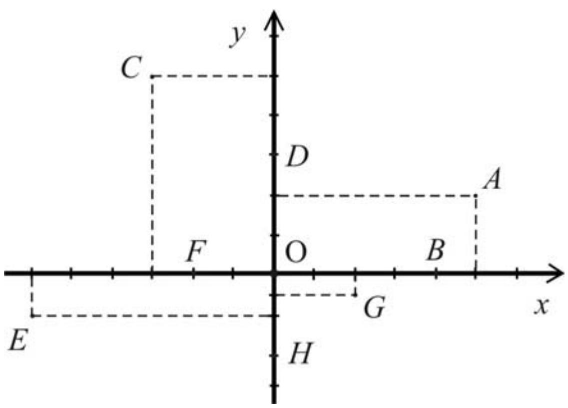
Координатните оски ја разделуваат координатната рамнина на четири делови наречени **квадранти**. Како **I квадрант** се зема делот горе десно, како **II квадрант** се зема делот горе лево, како **III квадрант** се зема делот долу лево и како **IV квадрант** се зема делот долу десно. Според тоа, произволна точка $P(x,y)$ лежи: во I квадрант ако $x>0$ и $y>0$; во II квадрант ако $x<0$ и $y>0$; во III квадрант ако $x<0$ и $y<0$; во IV квадрант ако $x>0$ и $y<0$; на $x-$оската ако $y=0$; на $y-$оската ако $x=0$. Бидејќи координатниот почеток лежи и на $x-$оската и на $y-$оската двете негови координати се еднакви на нула, односно $O(0,0)$ (црт. 3).

3. Конструирај ги во рамнината точките:

а) $A(5,2)$ б) $B(4,0)$ в) $C(-3,5)$ г) $D(0,3)$

д) $E(-6,-1)$ ѓ) $F(-2,0)$ е) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ ж) $H(0,-2)$

а потоа определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат.



Црт. 4

а) $A(5,2)$ лежи во I-от квадрант

б) $B(4,0)$ лежи на $x-$оската

в) $C(-3,5)$ лежи во II-от квадрант

г) $D(0,3)$ лежи на $y-$оската

д) $E(-6,-1)$ лежи во III-от квадрант

ѓ) $F(-2,0)$ лежи на $x-$оската

е) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ лежи во IV-от квадрант

ж) $H(0,-2)$ лежи на $y-$оската (црт. 4). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Определи во кој квадрант или на која координатна оска припаѓаат точките:

а) $A(3,-4)$ б) $B(-1,1)$ в) $C(-3,-5)$ г) $D(2,3)$

д) $E(-6,0)$ ѓ) $B\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ е) $G\left(\frac{1}{2},0\right)$ ж) $H(0,-1)$

и определи во кој квадрант или на која оска припаѓаат.

Најди ги координатите на проекциите M, N, P и Q на точките $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(5,-2)$ и $D(-3,-1)$ на:

2. $x-$оската **3.** $y-$оската.

4. Конструирај ја отсечката AB ако се познати координатите на нејзините крајни точки $A(1,4)$ и $B(5,2)$. Потоа најди ги должините m_x и m_y на нејзините ортогонални проекции на $x-$оската и $y-$оската, соодветно.

5*. Конструирај го триаголникот ABC, ако се познати координатите на неговите темиња: $A(1,-3)$, $B(5,2)$ и $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

5. 2. Растојание меѓу две точки

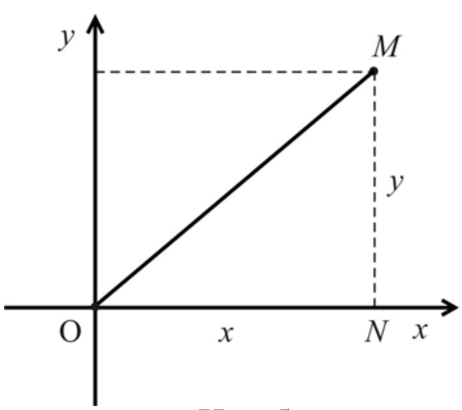
Во оваа лекција со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојанието меѓу две точки во координатна рамнина. Имено растојанието d меѓу две дадени точки M_1 и M_2 е должината на отсечката M_1M_2, односно $d=\overline{M_1M_2}$.

Да го решиме поедноставниот случај кога една од дадените точки е координатниот почеток (црт. 5). Нека N е подножјето на нормалата спуштена од точката $M(x,y)$ на $x-$оската. Од правоаголниот триаголник ONM заради Питагоровата теорема имаме

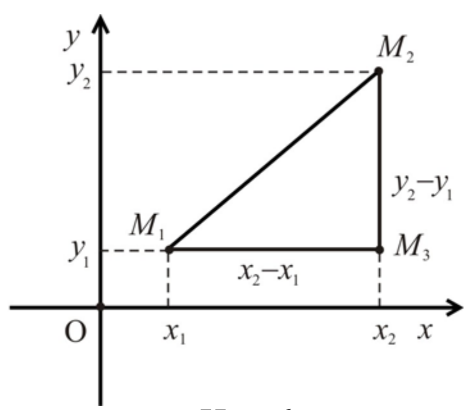
$$\boxed{d=\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. Пресметај го растојанието од точката $M(3,4)$ и координатниот почеток.

$d=\sqrt{3^2+4^2}=5.$ ♦



Црт. 5



Црт. 6

Да преминеме на општиот случај. Нека се дадени две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ чие растојание d треба да го најдеме (црт. 6). Да го разгледаме правоаголниот триаголник $M_1M_2M_3$. Должините на неговите катети се $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$ и $M_2M_3 = |y_2 - y_1|$, соодветно. Растојанието d меѓу точките M_1 и M_2 е должината на хипотенузата M_1M_2, односно

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

2. Пресметај го растојанието меѓу точките $M_1(-2,3)$ и $M_2(0,-2)$.

$d = \sqrt{(0-(-2))^2 + ((-2)-3)^2} = \sqrt{29}$. ♦

3. Провери дали точките $A(3,-6)$, $B(-2,4)$ и $C(1,-2)$ лежат на една иста права.

Ќе ги пресметаме должините $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ за да провериме дали едната од нив е збир на другите две:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Од $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ следува дека дадените точки лежат на една иста права. ♦

4. Определи го видот на триаголникот според страните, чии темиња се $A(1,1)$, $B(2,3)$ и $C\left(1, \frac{9}{4}\right)$.

Да ги пресметаме должините на неговите страни $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \overline{AC} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \qquad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Од $\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AB}$ може да заклучиме дека дадениот триаголник е рамнокрак. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1,-3)$ и $M_2(2,6)$ б) $M_1(0,2)$ и $M_2(0,-2)$

в) $M_1(-1,-2)$ и $M_2(2,4)$ г) $M_1(1,3)$ и $M_2(7,0)$.

2. Провери дали точките $A(1,-3)$, $B(3,-5)$ и $C(-5,7)$ се темиња на триаголник.

3. Најди ја ординатата на точката B, ако нејзината апсциса е еднаква на 7, а нејзиниото растојание до точката $A(-1,5)$ е еднакво на 10.

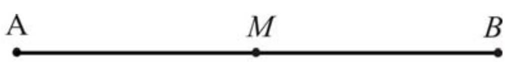
4. Дадени се точките $A(5,8)$ и $B(-11,-2)$. Најди ги координатите на точката C која е симетрична на точката B во однос на точката A.

5*. Дадени се точките $A(1,4)$, $B(3,-9)$ и $C(-5,2)$. Докажи дека тие се темиња на триаголник и најди ја должината на медијаната повлечена од темето B.

5. 3. Делење на отсечка во даден однос

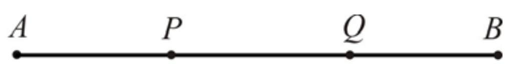
За точката M велиме дека ја дели отсечката AB $(A \neq B)$ во однос λ, сметано од A кон B, ако $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

1. Ако M е средина на отсечката AB, тогаш $\overline{AM} = \overline{MB}$, односно точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1$, сметано од A кон B (црт. 7). ♦



Црт. 7

2. Нека точките P и Q ја делат отсечката AB на три еднакви дела и нека $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Тогаш $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PB}$ и $\overline{AQ} = 2\overline{QB}$, од каде заклучуваме дека точката P ја дели отсечката AB во однос $\frac{1}{2}$, а точката Q во однос 2, сметано од A кон B (црт. 8).♦

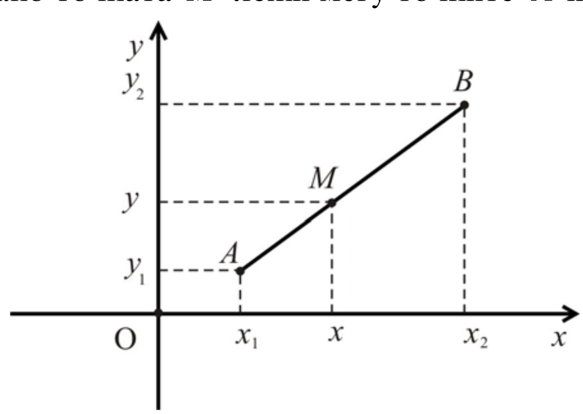


Црт. 8

Често, наместо да велиме ,,точката M ја дели отсечката AB во однос λ, сметано од A кон B'', велиме само ,, точката M ја дели отсечката AB во однос λ'', сметајќи притоа дека ознаката AB, а не BA, означува дека делењето е од A кон B.

Бројот λ е поголем од нула ако и само ако точката M лежи меѓу точките A и B. Специјално, $\lambda = 1$ ако и само ако точката M е средина на отсечката AB. Понатаму, $\lambda = 0$ ако и само ако точката M се совпаѓа со точката A. Ако $\lambda = -1$, тогаш $\overline{AM} = -\overline{MB}$, што не е можно. Според тоа $\lambda \neq -1$. Бројот λ е помал од нула и $\lambda \neq -1$ ако и само ако точката M лежи на правата AB, надвор од отсечката AB.

Да ги најдеме координатите на точката $M(x, y)$ која отсечката со крајни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во однос λ (црт. 9).



Црт. 9

Од $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ имаме дека $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ и $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$. Тогаш

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}$$

Ако $\lambda = \dfrac{p}{q}$, тогаш

$$\boxed{x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q}} \qquad \boxed{y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}}$$

Специјално, ако M е средина на отсечката AB тогаш $\lambda = 1$, па имаме

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

3. Нека е даден триаголникот ABC чии темиња имаат координати $A(-2,-3)$, $B(6,1)$ и $C(-4,5)$. Најди ги координатите на тежиштето на триаголникот.

За определување на координатите на тежиштето ќе го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2.

Од $x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ и $y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ следува $A_1(2,-1)$.

Тогаш $x_T = \dfrac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \dfrac{-4+4}{3} = 0$ и $y_T = \dfrac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \dfrac{5-2}{3} = 1$, па според тоа $T(0,1)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Нека $A(3,-7)$, $B(5,2)$ и $C(-1,0)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

2. Нека $A(1,1)$, $B(5,11)$ и $C(3,-1)$ се темиња на триаголник. Најди ја должината на медијаната повлечена од темето A.

3. Дадени се точките $A(-3,-2)$ и $B(7,3)$. Најди ги координатите на точките кои отсечката AB ја делат на пет еднакви делови.

4. Дадени се точките $A(3,1)$ и $B(8,3)$. Најди ги координатите на точката M која отсечката AB ја дели во однос:

а) $2:3$ б) $3:2$ в) $-2:3$ г) $-3:2$

5. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC ако се познати средините на неговите страни $P(3,-2)$, $Q(1,6)$ и $R(-4,2)$.

6*. Нека точките $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ и $C(c_1,c_2)$ се темиња на триаголник. Докажи дека за тежиштето на триаголникот ABC важи $T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

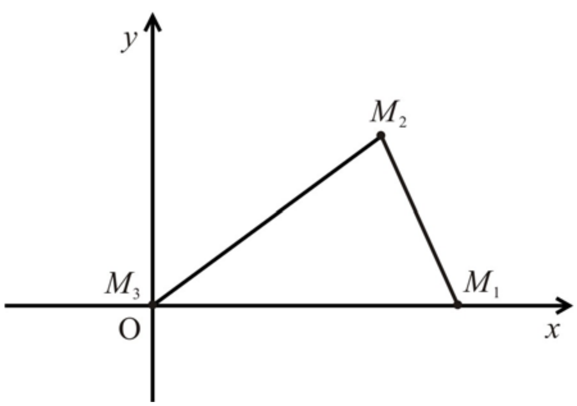
5. 4. Плоштина на триаголник

Да ја пресметаме плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$. Оваа задача поедноставно е да ја решиме во два чекори.

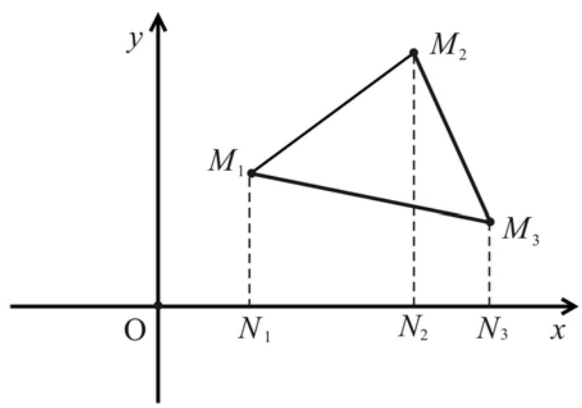
I чекор. Прво ќе ја определиме плоштината на триаголникот ако едно негово теме е координатниот почеток, а другото теме лежи на $x-$оската (црт. 10). Тогаш третото теме лежи или над $x-$оската или под $x-$оската. Користејќи ја формулата дека плоштината на триаголникот P е еднаква на полупроизводот од должината на основата и висината, добиваме дека површината на триаголникот

$$P=\frac{|x_1y_2|}{2}$$

при што користиме апсолутна вредност бидејќи плоштината е позитивна величина, а x_1 или y_2 може да бидат позитивни или негативни.



Црт. 10



Црт. 11

II чекор. Во општ случај (црт. 11) плоштината на триаголник со дадени темиња $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ се пресметува така што од збирот на плоштините на трапезите $N_1M_1M_2N_2$ и $N_2M_2M_3N_3$ се одзема плоштината на трапезот $N_1M_1M_3N_3$, па имаме

$$P=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)-\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)].$$

Ако точката M_2 е под правата определена со точките M_1 и M_3 се добива негативна вредност за плоштината на триаголникот, па треба да користиме апсолутна вредност, бидејќи плоштината е позитивна величина.

$$P=\frac{1}{2}|\,y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\,|=$$
$$=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|.$$

Од формулата за пресметување на плоштина на триаголник може да се добие услов три точки да лежат на една права. Ако три точки лежат на една права, тогаш плоштината на триаголникот чии темиња се тие точки е еднаква на нула.

1. Пресметај ја плоштината на триаголник со темиња $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,5)$.

Според формулата за пресметување на плоштина на триаголник имаме

$$P=\frac{1}{2}|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|=$$
$$=\frac{1}{2}|\,1(3-5)-2(5-1)+0(2-3)\,|=4$$

од каде следува дека плоштината на триаголникот е 4 единици. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја плоштината на триаголник со темиња $A(-3,2)$, $B(3,5)$ и $C(1,-3)$.

2. Дали точките $P_1(-3,-3)$, $P_2(3,5)$ и $P_3(6,9)$ се темиња на триаголник?

3. Испитај дали точките $M(1,-3)$, $B(3,5)$ и $C(2,1)$ лежат на иста права.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако $A(0,1)$, $B(3,7)$, $C(4,4)$ и $D(1,-2)$.

5. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако $A(1,4)$, $B(5,3)$, $C(-3,-5)$ и $D(-2,1)$.

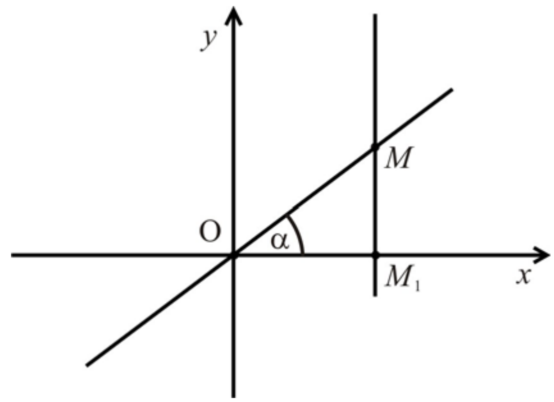
6*. Пресметај ја плоштината на триаголниците APB и BPC, ако $A(1,1)$, $B(-1,-2)$, $C(-4,7)$ и P е средишна точка на страната AC.

5. 5. Експлицитен облик на равенка на права

Бидејќи права е основен геометриски поим кој не се дефинира, за да дојдеме до нејзината равенка, потребно е да искористиме некое нејзино својство. Да ја изведеме најнапред равенката на права која минува низ координатниот почеток и е различна од координатните оски (црт. 12).

Нека $M(x, y)$ е произволна точка од правата различна од координатниот почеток. Да ги означиме со M_1 ортогоналната проекција на точката M на $x-$оската и со α аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на $x-$оската. Тогаш односот

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{x}{y} = tg\alpha$$



Црт. 12

е константен за произволна положба на точката M. Тој се означува со k и се нарекува **аглов коефициент** или **коефициент на правец** на правата. Оттука следува дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката

$\boxed{y = kx}$.

Според тоа, последната равенка претставува равенка на права која минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол α, каде што $k = tg\alpha$.

1. Запиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Бидејќи правата минува низ координатниот почеток, нејзината равенка е од облик $y = kx$. Од условот на задачата имаме дека $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = x$. ♦

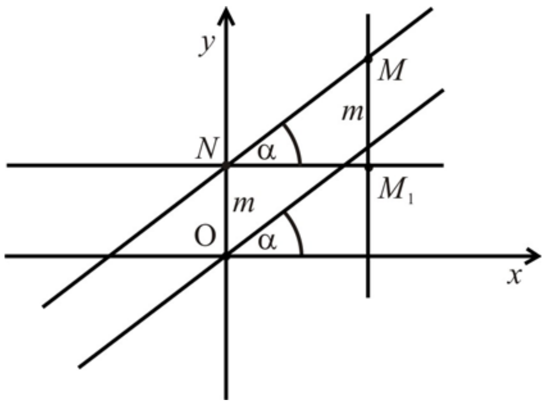
Нека е дадена произволна права во координатната рамнина. Тогаш можни се следниве три случаи:

• правата ги сече двете координатни оски (црт. 13). Нека $N(0, m)$ е пресечната точка на правата со $y-$оската. Притоа, ординатата на секоја точка од правата е поголема за m, ако m е позитивно или намалена за m, ако m е негативно, во однос на точките од правата што минува низ координатниот почеток и е паралелна на дадената. Двете разгледувани прави зафаќаат еднакви агли со позитивната насока

x оската, па според тоа нивните аглови коефициенти се еднакви. Бидејќи правата која што минува низ координатниот почеток е зададена со равенката

$$y = kx,$$

за равенката на дадената права добиваме:



Црт. 13

$$\boxed{y = kx + m},$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на y – оската. Добиената равенка се нерекува **експлицитен облик на равенка на права**, а за правата велиме дека е зададена во **експлицитен облик**.

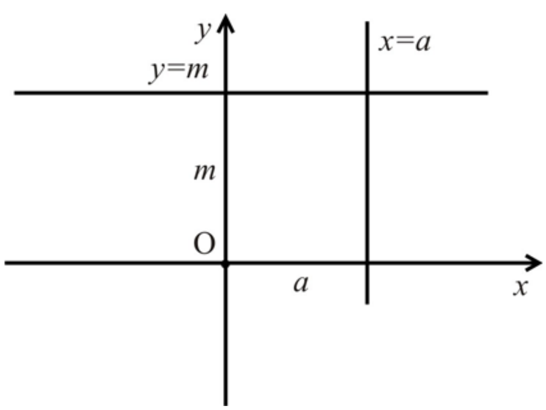
2. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$.

• Според условот на задачата, точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$ се точки од правата, па нивните координати ја задоволуваат равенката $y = kx + m$. На тој начин доаѓаме до системот $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ чии решенија се $k = 3$ и $m = -9$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = 3x - 9$. ♦

Имајќи го предвид геометриското значење на агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска во експлицитниот облик на равенка на права може да заклучиме дека:

а) две прави имаат еднакви аглови коефициенти ако и само ако се паралелни;

б) две прави имаат еднакви отсечоци на ординатните оски ако и само ако ја сечат ординатната оска во една иста точка.



Црт. 14

• правата е паралелна со x – оската или се совпаѓа со x – оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од x – оската. Бидејќи растојанието од x – оската на точка е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со m, за равенката на правата добиваме:

$$\boxed{y = m}$$

Оваа положба на правата може да се третира како специјален случај на претходниот. Имено, во овој случај правата зафаќа агол

$\alpha = 2k\pi,\ k = 0,1,2,...$ со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа аголовиот коефициент $k = 0.$ Специјално равенката на $x-$оската е $y = 0;$

• правата е паралелна со $y-$оската или се совпаѓа со $y-$оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $y-$оската. Бидејќи растојанието од $y-$оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со $a,$ за равенката на правата добиваме

$$\boxed{x = a}$$

Специјално $y-$оската е зададена со равенката $x = 0.$

3. Каква е положбата на правите $x = 2$ и $y = 3$ во координатната рамнина?

Правата $x = 2$ е паралелна на $y-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 2 единици од неа, додека правата $y = 3$ е паралелна на $x-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 3 единици од неа.♦

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали точките $M(-1,1),\ N(2,-3)$ и $P(2,2)$ се точки од правата $y = -x + 4.$

2. Најди ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ в) $\alpha = \pi$

3. Најди ги аголовиот коефициент и отсечокот на $y-$оската на правата зададена со:

а) $y = 2x - 3$ б) $y = -x + 3$ в) $y = -2$ г) $y = \sqrt{3}x$

4. Запиши ја равенката на правата која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и отсечокот на ординатната оска е еднаков на $-\frac{1}{2}.$

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 135^0.$

6. Најди ги аголовиот коефициент и отсечокот на ординатната оска што го отсекува правата што минува низ точките $A(2,-1)$ и $B(-3,5).$

7*. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-8)$ и $N(-1,7).$

5. 6. Општ облик на равенка на права

Во претходната лекција за равенка на права во координатната рамнина добивме равенка од прв степен по променливите x и y. Во оваа лекција ќе разгледаме што претставува општа равенка од прв степен со две променливи x и y, односно равенка од обликот:

$$Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Претпоставуваме дека $A\neq 0$ или $B\neq 0$. Навистина, ако $A=B=0$, тогаш дадената равенката се сведува на равенката $C=0$. Во тој случај, ако $C\neq 0$ не постојат точки во рамнината кои ја задоволуваат равенката, додека, ако $C=0$, сите точки во рамнината ја задоволуваат равенката.

• Ако $A=0$, тогаш $B\neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{C}{B}$. Геометриското место на точки во рамнината коишто ја задоволуваат последната равенка е права паралелна со $x-$оската и минува низ точката $M\left(0,-\frac{C}{B}\right)$.

• Ако $B=0$ тогаш $A\neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $x=-\frac{C}{A}$. Геометриското место на точки во рамнината кои ја задоволуваат последната равенка е права која е паралелна со $x-$оската и минува низ точката $N\left(-\frac{C}{A},0\right)$.

• Ако $A\neq 0$ и $B\neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ која што е равенка на права во експлицитен облик со аглов коефициент $k=-\frac{A}{B}$ и отсечок на $y-$оската $m=-\frac{C}{B}$.

Од направената дискусија може да заклучиме дека равенката од облик

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

е равенка на права, наречена **општ облик на равенка на права**.

1. Доведи ја во општ облик равенката на правата $y=-\frac{1}{2}x+3$.

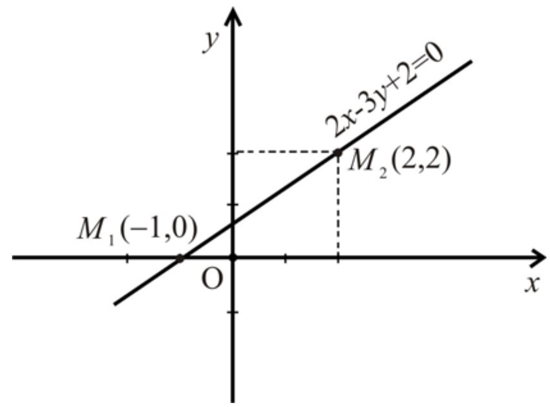
Равенка е еквивалентна на равенката $\frac{1}{2}x+y-3=0$, односно на равенката $x+2y-6=0$. ♦

2. Дадена е равенката на права $3x+3y-5=0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

Ако дадената равенка ја решиме според y ја добиваме равенката $y=-x+\frac{5}{3}$, која е еквивалентна на дадената, односно претставува равенка на една иста права во рамнината. Од $k=tg\alpha=-1$ следува дека $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и $m=\frac{5}{3}$. ♦

3. Конструирај ја правата зададена со равенката $2x-3y+2=0$.

За да ја решиме поставената задача, доволно е да конструираме две точки од правата а потоа низ нив да ја конструираме правата (црт. 15). Избираме две произволни вредности за x, а потоа ги пресметуваме соодветните вредности за y. Во овој случај згодно е една избрана вредност да биде, на пример, $x_1=2$, бидејќи во тој случај добиваме целобројна вредност за y, $y_1=2$. Слично, можеме да избереме вредност за x, $x_2=-1$, од каде добиваме дека $y_2=0$. ♦



Црт. 15

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во општ облик следниве равенки на права:

а) $y=2x-3$ б) $y=-4$ в) $x=3$

2. Најди ги коефициентот на правецот и отсечокот на ординатната оска на правите:

а) $2x-y+3=0$ б) $5x+2y-3=0$ в) $3x+8y+16=0$

3. Дадена е равенката на права $x+y-3=0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

4. Конструирај ги правите зададени со равенките:

а) $y=3x+1$ б) $x=\sqrt{2}$ в) $y=\pi$

г) $y=2x+2$ д) $y=\frac{1}{3}x-2$ ѓ) $x=0{,}5y-1$

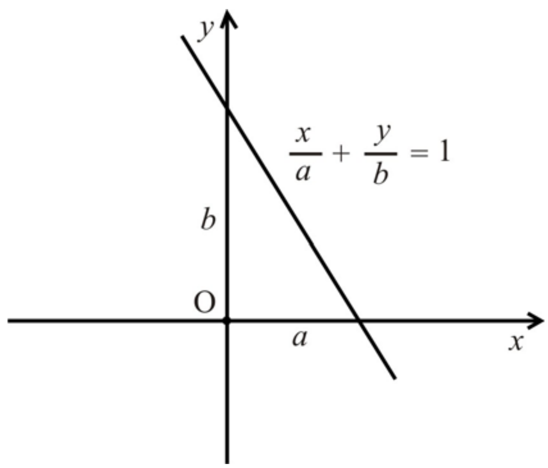
5*. Дали равенките $Ax+By+C=0$ и $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$, каде што $\lambda\neq0$ се равенки на една иста права во координатната рамнина.

5. 7. Сегментен облик на равенка на права

Како што веќе видовме, равенката

$Ax+By+C=0$ (1)

претставува равенка на права во координатната рамнина. Притоа, правата минува низ координатниот почеток ако и само ако $C=0$. Коефициентот $A=0$ ако и само ако правата е паралелна на $x-$оската, додека коефициентот $B=0$ ако и само ако правата е паралелна на $y-$оската.



Црт. 16

Претпоставуваме дека дадената права не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска (црт. 16). Тогаш за коефициентите од нејзината равенка важи: $A\neq 0,\ B\neq 0$ и $C\neq 0$. Ако равенката (1) ја помножиме со бројот $-\frac{1}{C}$, таа го добива обликот

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-1=0$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Ако ставиме $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$, тогаш равенката го добива облик

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

наречен **сегментен облик на равенка на права**.

Да го испитаме геометриското значење на параметрите a и b. Ако во равенката (2) ставиме $y=0$, а потоа $x=0$, ги добиваме пресечните точки $P(a,0)$ и $Q(0,b)$ на правата со $x-$оската, односно $y-$оската. Според тоа броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските.

1. Запиши ја во сегментен облик равенки на права $x-3y-6=0$, а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

Дадената равенка на права е равенка од општ облик. Ако равенката ја помножиме со $-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$, ја добиваме равенката $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ која е еквивалентна со равенката $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$. Последната равенка е запишана во сегментен облик и е еквивалентна на дадената. Должината на сегментот на $x-$оската изнесува 6 единици, додека должината на сегментот на $y-$оската изнесува 2 единици. ♦

2. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $2x-5y-10=0$.

Бидејќи координатните оски се сечат под прав агол, бараниот триаголник е правоаголен со теме при правиот агол во координатниот почеток, катетите лежат на координатните оски, а хипотенузата на дадената права. Знаеме дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети, а тоа се токму должините на сегментите отсечени на координатните оски. Ако равенката на правата ја трансформираме до сегментен облик, ја добиваме равенката $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$. Според тоа, должините на сегментите се 5 единици и 2 единици од каде што следува дека бараниот правоаголен триаголник има катети 5 единици и 2 единици. Тогаш неговата плоштина изнесува 5 квадратни единици. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $3x-2y+12=0$ б) $y=-x+1$ в) $y=4x-2$,

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од кооринатните оски.

2. Најди ја вредноста на параметарот k за која збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $2x+5ky-3=0$ е еднаков на 10.

3. Најди ја вредноста на параметарот k за која производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $6x+5y-12k=0$ е еднаков на $\frac{5}{6}$.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $x+2y-6=0$.

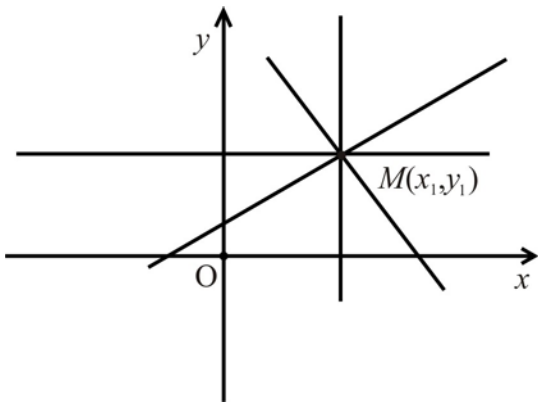
5*. Низ точката $M(4,-3)$ повлечи права која со координатните оски заградува триаголник со плоштина еднаква на 3 квадратни единици.

5. 8. Однос на права и точка

5.8.1. Равенка на сноп прави низ една точка

Нека $M(x_1, y_1)$ е фиксирана точка во координатната рамнина. Низ дадената точка минуваат безброј прави за кои велиме дека формираат **сноп прави** со центар во точката M (црт. 17). Секоја права низ точката M има општа равенка

$$Ax + By + C = 0.$$



Црт. 17

Точката M лежи на правата, па нејзините координати ја задаволуваат равенката на правата, односно важи

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентите A и B ги добиваме равенките на различните прави низ точката M.

Од сите прави во снопот прави низ M постои единствена права која е паралелна на y – оската. Нејзината равенка гласи $x = x_1$. Единствено таа права нема аглов коефициент и нема отсечок на y – оската, па според тоа оваа права не може да се зададе во експлицитен облик. Секоја друга права низ точката M има експлицитна равенка

$$y = kx + n.$$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$$y_1 = kx_1 + n.$$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентот k, ги добиваме равенките на различните прави низ точката M, освен правата паралелна со y – оската.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$.

Снопот прави со центар во точката M има равенка $y-2=k(x+3)$. Бидејќи бараната права од снопот со $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$, таа има аглов коефициент $k = tg135^0 = -1$. Тогаш бараната равенка на права гласи $y-2=-(x+3)$, односно $x+y+1=0$. ♦

5.8.2. Равенка на права низ две точки

Користејќи ја равенката на сноп прави низ една точка, може лесно да ја најдеме равенката на права која минува низ две дадени точки.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-12,5)$ и $M_2(8;-3)$.

Снопот прави со центар во M_1 има равенка $y-5=k(x+12)$. Бидејќи бараната права минува низ точката M_2, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството $-3-5=k(8+12)$, од каде што добиваме дека $k=-\frac{2}{5}$. Според тоа, равенката на правата гласи $y-5=-\frac{2}{5}(x+12)$, односно $2x+5y-1=0$. ♦

Примерот што го разгледавме ја открива постапката за наоѓање равенка на права низ две дадени точки. Нека се дадени точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, (црт. 18). Ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ дадените точки, односно правата M_1M_2.

• Ако $x_1 = x_2$, тогаш правата M_1M_2 е нормална на $y-$оската, па нејзината равенка во тој случај гласи

$\boxed{x = x_1}$

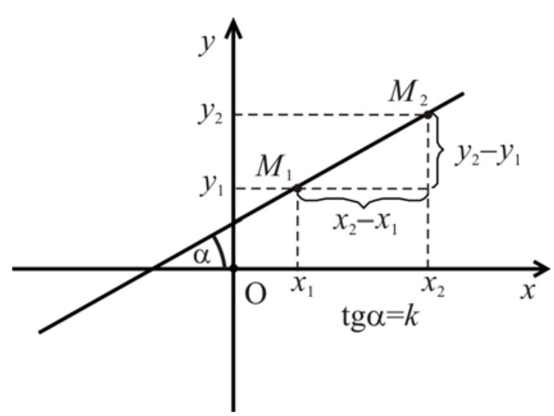
• Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш снопот прави со центар во M_1 има равенка

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Бидејќи правата M_1M_2 минува низ точката M_2 нејзините координати го задоволуваат равенството

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Тогаш агловиот коефициент на правата M_1M_2 е



Црт. 18

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Ако вредноста за k ја замениме во равенката на снопот прави, ја добиваме **равенката на права низ двете дадени точки**:

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

Од равенката на права низ две дадени точки можеме да го изведеме **условот за колинеарност на три точки**. Имено, трета точка $M_3(x_3, y_3)$ лежи на правата определена со точките M_1 и M_2 ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата определена со двете дадени точки, односно равенката

$$\boxed{y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)}$$

5.8.3. Растојание од точка до права

Наша следна задача е да научиме да пресметуваме растојание од дадена точка до дадена права во координатната рамнина. Како што знаеме, растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

Ако равенката на правата е зададена во општ облик

$$Ax+By+C=0,$$

тогаш равенката треба да ја помножиме со нормирачки множител $M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C. Тогаш растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од равенката на правата, запишана во облик

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Конечно добиваме

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

1. Најди ги растојанијата од точките $A(2,1)$ и $B(-2,4)$ до правата $4x-3y+15=0$.

За да го најдеме растојанието од дадената точка до правата, треба равенката да ја множиме со нормирачкиот множител $M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\pm 5}$. Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C, па во овој случај $M=-\frac{1}{5}$. Тогаш равенка на правата гласи $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$. Ако сега ги замениме кооринатите на дадената точка, добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1-3\right|=\left|-4\right|=4$. Бидејќи знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше негативен, точката A и координатниот почеток се на иста страна од правата.

Аналогно, за точката B добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot(-2)+\frac{3}{5}\cdot 4-3\right|=\left|1\right|=1$. Во овој случај знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше позитивен, па точката B и координатниот почеток се на различни страни од правата.♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на снопот прави што минуваат низ точките:
а) $M(2,-3)$ б) $M(-1,4)$

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-2,1)$ и има аглов коефициент $k=-3$.

3. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4,-7)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha=120^0$.

4. Најди го коефициентот на правецот на правата која минува низ точките:
а) $M_1(-1,4)$ и $M_2(4;-3)$ б) $M_1(0,-2)$ и $M_2(-1;3)$ в) $M_1(1,4)$ и $M_2(-2,4)$

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M_1(-1,4)$ и $M_2(4,-3)$.

6. Дали точките $M_1(0,3)$, $M_2(2,6)$ и $M_3(-1,-3)$ лежат на иста права?

7. Најди го растојанието од точката $A(-5,-1)$ до правата $4x+3y+30=0$. Дали дадената точка и координатниот почеток се на иста страна од правата?

8. Најди го растојанието на правата $9x-12y+10=0$ од координатниот почеток.

9*. Определи која од точките $M(-3,1)$ и $N(5,4)$ е на помало растојание од правата $x-2y-5=0$. Покажи дека дадената права не ја сече отсечката MN.

10*. Најди ја равенката на правата која е на растојание $d=5$ од точката $C(4,3)$ и отсекува еднакви сегменти на координатните оски.

5. 9. Заемна положба на две прави

5.9.1. Заемна положба на две прави

Како што знаеме, две прави во рамнина може да се сечат, да се паралелни или да се совпаѓаат. Нека се дадени две прави со своите општи равенки:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Ќе ја испитаме зависноста меѓу коефициентите на дадените равенки во секој од наведените три случаи.

• Дадените прави се сечат, односно имаат една заедничка точка ако и само ако системот

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

има единствено решение.

Нека $(x_0 y_0)$ е единственото решение на дадениот систем. Ако правата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x_0 + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \qquad (2)$$

На сличен начин, ако првата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y_0 + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \qquad (3)$$

Доволен услов за единственост на решението (x_0, y_0), односно доволен услов за да се сечат дадените прави е нејзините коефициенти да ја задоволуваат релацијата $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула. Во тој случај решението на дадениот систем гласи:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (4)$$

Добиените броевите се координати на пресечната точка на дадените прави. Навистина, ако добиените вредности за x и y од изразот (4) ги замениме во (1), ќе заклучиме дека равенките (1) преминуваат во идентитети.

1. Покажи дека правите $2x - y - 5 = 0$ и $x + 3y + 1 = 0$ се сечат.

По елиминацијата на y, добиваме $7x-14=0$, од каде што следува дека $x=2.$ Тогаш за y од првата равенка добиваме $y=-1.$ ♦

• За да покажеме дека условот $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ е потребен за да се сечат дадените прави, ќе го разгледаме случајот кога

$$A_1B_2-A_2B_1=0.$$

Ако во тој случај дадените прави имаат уште една зедничка точка (x_1,y_1) од равенствата (2) и (3), следува:

$$C_1B_2-C_2B_1=0 \text{ и } A_1C_2-A_2C_1=0.$$

Од последните три равенства следува дека постои реален број λ таков што $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$ и $C_2=\lambda C_1$. Навистина, бидејќи еден од броевите A_1 или B_1 е различен од нула, може да претпоставиме дека $B_1\neq 0.$ Ако ставиме $\lambda=\frac{B_2}{B_1}$ од равенството $A_1B_2-A_2B_1=0$ следува дека $A_2=\lambda A_1$, а од равенството $C_1B_2-C_2B_1=0$ следува дека $C_2=\lambda C_1.$ Според тоа, равенката на едната права се добива од равенката на другата права помножена со реален број $\lambda\neq 0.$ Тоа значи дека дадените прави се совпаѓаат. Условот за совпаѓање на две прави гласи:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула.

• Ако $A_1B_2-A_2B_1=0$ и еден од броевите $C_1B_2-C_2B_1$ и $A_1C_2-A_2C_1$ е различен од нула, тогаш системот (1) нема решение, што значи правите се паралелни. Според тоа, потребен и доволен услов дадените прави да бидат паралелни е условот

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}}.$$

2. Покажи дека правите $3x-2y+5=0$ и $4y-6x-1=0$ се паралелни.

Од $\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}\neq\frac{5}{1}$, следува дека правите се паралелни. ♦

5.9.2. Агол меѓу две прави. Услов за нормалност на две прави

Нека се дадени две прави со своите експлицитни равенки:

$$y=k_1x+m_1 \quad \text{и} \quad y=k_2x+m_2.$$

Бидејќи аголот φ под кој се сечат правите не се менува при транслација на правите, аголот што го зафаќаат дадените прави е еднаков на аголот што го зафаќаат правите:

$y = k_1 x$ и $y = k_2 x.$

Тогаш $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$ Ако на двете страни од равенството примениме тангенс добиваме

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

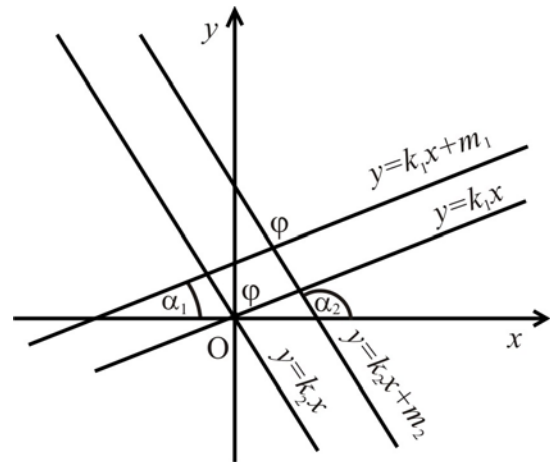
или ако знаеме дека

$tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$

добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Аголот што се добива од оваа формула е аголот што се добива со ротација на првата права во позитивна насока околу пресечната точка додека не се совпадне со втората права (црт. 19).



Црт. 19

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш аголот меѓу нив е $\frac{\pi}{2} - \alpha,$ каде што α е аголот што го зафаќа другата права со позитивната насока на $x-$оската.

1. Најди го аголот меѓу правите $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0.$

За првата права коефициентот на правецот $k_1 = 2,$ а за втората права $k_2 = -3.$ Според тоа, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3-2}{1 + 2\cdot(-3)} = 1,$ од каде што следува дека $\varphi = \frac{\pi}{4}.$ ♦

Ако правите се нормални, тогаш $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1},$ од каде што следува дека $k_2 = -\frac{1}{k_1}.$ Според тоа, **условот за нормалност на две прави** гласи:

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}.$$

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш тие се нормални ако и само ако другата права е паралелна со $x-$оската.

2. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $M(-1,1)$ и е нормална на правата чија равенка е $3x - y + 2 = 0.$

Равенката на снопот прави низ точката M гласи $y + 1 = k(x - 1).$ Треба да ја определиме равенката на онаа права од снопот која е нормална на дадената права, односно на правата $y=3x-2.$ Од условот за нормалност на две прави, добиваме дека $k=-\frac{1}{3}.$ Според тоа равенката на бараната права гласи $x+3y+2=0.$ ♦

Ако правите се зададени со своите општи равенки:

$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$

тогаш изразувајќи ги коефициентите k_1 и k_2 преку коефициентите A_1, B_1, A_2 и B_2 имаме:

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1} \text{ и } k_2=-\frac{A_2}{B_2},$$

од каде што за аголот меѓу две прави добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}} \text{ за } A_1A_2+B_1B_2\neq 0 \text{ и } \boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}} \text{ за } A_1A_2+B_1B_2=0.$$

Ако правите се зададени со општи равенки, условот за нормалност гласи:

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$$

Задачи за самостојна работа

1. Утврди кои од следниве прави се сечат, кои се паралелни, а кои се совпаѓаат. Во случај кога правите се сечат, најди ја пресечната точка:

а) $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$;

б) $3x+y-17=0$ и $6x+2y+12=0$;

в) $2x-y+3=0$ и $6x-3y+9=0.$

2. Најди ги пресечните точки на координатните оски со правите:

а) $x+10y-5=0$ б) $2x-3y+12=0.$

3. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2,3)$ и е паралелна на правата $5x-6y+7=0.$

4. Најди го аголот меѓу правите $2x-y+7=0$ и $3x+y+10=0.$

5. Најди ја правата која минува низ точката $A(-2,8)$ и зафаќа агол $\varphi=\frac{\pi}{4}$ со правата $y=3x-5.$

6*. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(3,15)$ и е нормална на правата $3x-5y+8=0.$

5. 10. Задачи за вежбање

1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако $A(-5,5)$, $B(7,-3)$ и $C(3,1)$.

2. Најди ги координатите на точката M која ја дели отсечката AB во однос λ, ако:

а) $A(10,3)$, $B(-2,-5)$ и $\lambda=\frac{1}{3}$ б) $A(-2,-5)$, $B(13,5)$ и $\lambda=\frac{3}{2}$.

3. Точките $A(1,1)$, $B(-1,3)$ и $C(2,0)$ лежат на една права. Определи го односот λ во кој точката A ја дели отечката CB.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(0,0)$, $B(3,-2)$ и $C(1,5)$.

5. Најди ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-7,2)$ и $M_2(3,-5)$.

6. Докажи дека точките $A(1,9)$, $B(-2,3)$ и $C(-5,-3)$ лежат на една права.

7. Дадени се точките $A(-2,-1)$, $B(1,2)$ и $C(-1,4)$. Запиши ги координатите на точката D, ако $ABCD$ е паралелограм.

8. Најди го растојанието d од точката $M(2,3)$ до правата:

а) $3x+4y-25=0$ б) $12x-5y+4=0$

9. Запиши ги равенките на медијаните на триаголникот ABC, ако $A(3,2)$, $B(5,4)$ и $C(1,4)$.

10. Даден е триаголник ABC. Запиши ги координатите на:

а) тежиштето T на триаголникот, ако $A(-8,1)$, $B(1,2)$ и $C(-5,-3)$

б) ортоцентарот H на триаголникот, ако $A(-4,8)$, $B(1,-7)$ и $C(7,5)$.

11. Најди ги координатите на точката M која е симетрична на точката $N(3,2)$ во однос на правата $x-y+5=0$.

12*. Пресметај ја плоштината на даден квадрат, ако две негови страни лежат на правите $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$.

13*. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,8)$ и со координатните оски заградува триаголник со плоштина $P=6$.

14*. Најди го агловиот коефициент на висините на триаголникот ABC, ако $A(-2,1)$, $B(3,4)$ и $C(1,-2)$.

Решенија и одговори на задачите

1.1.

1. а) 18750 денари; б) $937{,}5$ денари; в) $260{,}4$ денари по $(30{,}360)$ и $256{,}85$ денари по $(k{,}365)$. **2**. 20 години. **3**. 5%. **4**. а) 14750 денари; б) 87500 денари.
5. $K = K_1 + K_2 = 108000$ денари. **6**. 2691 денари.

1.2.

2. $I = 12000$, $K = 72000$ денари. **3**. $I = 1760$, $K = 35200$ денари. **4**. 70400 денари.
5. $K = 33750$ денари, $I = 150$ денари. **6**. Долг 260400 денари, камата 65100 денари.
7. Долг 10568 денари, камата 568 денари.

1.3.

4. 75 денови. **5**. 5 месеци и 20 дена. **6**. а) 50 дена, 4.05; б) 13 дена, 4.05. **7**. 29 дена, 2.05. **8**. 23.04. **9**. 7.05.

1.4.

2. 123 денови. **3**. 69 денови или 13.06. **4**. 25.02. **5**. 8.05, за 28 дена со стартен датум 10.04.

1.5.

4. *Dk* = 21,875 денари; *Dr* = 21,685 денари; разлика = 0,1897. **5.** $ 1 195 168,66

1.6.

4. 3 166. **5.** уплати на 31.12. изнесуваат 17 976,1 денари; исплати = 15 200 денари; камата = 922 денари; салдо = 2 776 денари.

1.7.

5. Редовна камата = 320,9 денари, казнена камата = 27,30;
салдо на изедначување = 49.651,8 денари.

1.8.

1. 826 денови (или 2 години, 3 месеци и 6 дена). **2**. $K = 176147$ денари. **3**. $p = 4{,}64\%$.
4. $K = 306748$ денари. **5.** $K = 300000$ денари. **6**. 18000 денари. **7**. $K = 105680$ денари, $I = 5680$ денари. **8**. 10.04 со $61{,}3\%$. **9**. за 246 дена. **10**. 13.06.
11. дисконт = 2222,22 ефективна сума =$ 247 797,36.
12. ефективна сума = $ 2 984 200. **13.** ефективна сума = 147 546 денари,
Dk = 2 287,5 денари. **14.** $ 147 192. **15.** 63 дена. **16.** 2 471 денари. **17.** уплата = 79 770 денари; исплата = 65 000 денари; салдо = 14 770 денари; камата = 1 770 денари.
18. редовна камата = 4.248 денари, казнена камата = 62,46 денари; салдо на израмнување = 25.689,54.

2.1.

2. а) 80 дела; б) 130 дела. **4**. а) 80 грејни; б) 5040 грејни. **5**. а) 23 карати 1 грејн; б) 16 карати 1 грејн; в) 232 пенивејти 11 грејни; г) 209 пенивејти 16 грејни.

2.2.

1. $W\,80,,9,6$. **2**. 979,17 ‰ . **3**. 640 ‰ . **4**. а) 600 ‰ ; б) $W\,7,,2,4$. **5**. а) 420 ‰ ; б) $W\,121,,4,8$.

2.3.

1. $158{,}4g$. **2**. $498{,}75g$. **3**. $700g$. **4**. $384g$.

2.5.

5. 5,5% пораст на евро и 5,1% пад на долар **6**. Девалвација, 46,3% **7.** 1,383

2.8.

4. 144.000 УСД **5**. 68.493.

2.9.

5. 0,694 - 0,6849

2.10.

1. 225 EUR **2**. Загуба 3.000 МКД

2.11.

1. Во 14 часот +20 EUR, во 19 часот -8 EUR **2.** Просечен курс 1,041 профит 767,5 CHF. **3.** 100 МКД. **4.** 17 000 USD. **5.** во 15 часот.

2.12.

1. $W\,2,,1,28$. **2**. 600 ‰ . **3**. 881,25 ‰ . **4**. а) 800 ‰ ; б) $W\,30$. **5**. $117{,}5g$. **6**. $296g$. **7**. 870 ‰ . **8**. 180 пенивејти. **9**. +1,65% -1,57% **10**. Депресијација, 21,9% **11**. 1,3965. **12.** Во 14 часот: профит 48 EUR, во 19 часот: загуба 24 EUR **13.** Просечен курс 1,64, профит (изразено во AUD 1454, изразен во EUR 889).

3.1.

2. а) 2^{x+y}, б) 2^{-x}, в) 132^{x}, г) 10^{xy}. **3.** а) $3^{x}=9^{x/2}$, б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}>\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x<0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x=0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x}<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x>0$. **4.** а) $x<y$, б) $x>y$, в) $x<y$. **5.** а) $4^{x}-9^{x}$, б) $25^{x}+25^{-x}-2$, в) $64^{x}+3\cdot 16^{x}+3\cdot 4^{x}+1$.

3.2.

1. а) $x=-3$, б) $x=0$, в) $x=8$, г) $x=-3$, д) $x_1=4$, $x_2=-1$, ѓ) $x=2$. **2.** а) $x=8$, б) $x=2$, в) $x=-15$ г) $x=-6$. **3.** а) $x_1=1$, $x_2=0$, б) $x=0$, в) $x=-2$. **4.** а) $x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=0$, б) $x_1=2$, $x_2=-1$, в) $x_1=-1$, $x_2=6$. **5.** а) $x=4$, б) $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{3}{2}$, в) $x_1=3$, $x_2=2$.

3.3.

1.

Поими	$\log_6 216=3$	$\log_x \frac{4}{9}=2$	$\log_{\sqrt{7}} 49=4$	$\log_a(b+2)=5$	$\log_{25} 5=\frac{1}{2}$
Логаритам	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
Основа на логаритамот	6	x	$\sqrt{7}$	a	25
Логаритмант	216	$\frac{4}{9}$	49	$b+2$	5

2. а) –2, б) 2, в) $\frac{1}{2}$, г) $-\frac{1}{2}$. **3.** а) $x=\sqrt{3}$, б) $x=6$, в) $x=-2$, г) $-2{,}1$. **4.** а) 2, б) 9. **5.** а) 1, б) 30, **6.** $x\in(-\infty,0)\cup(1+\infty)$.

3.4.

1. а) $\log x=\log 3+\log a+\log b$, б) $\log x=2\log a+\log b+5\log c$,

в) $\log x=-\log 2+\log a+\log b-\log c$, г) $\log x=\log 2+\log(a-b)$, д) $\log x=\frac{1}{2}\log a-\log(b^2-c^2)$,

ѓ) $\log x=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{3}\log b$. **2.** а) $-\frac{1}{2}$, б) -18, в) 1. **3.** а) $x=10$, б) $x=\frac{8}{9}$, в) $x=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$,

г) $x=\sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$, д) $\frac{5}{3}$, ѓ) $\frac{8}{27}$, е) $\sqrt[3]{6}$, ж) 24. **4.** а) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; б) 1,08; 1,20; 1,26. **5.** а) –3, б) 3, в) –1, г) –1.

3.5.

2 . Упатство: а) $\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1=\log_3 7\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 7}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}+1$,

б) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 4}\cdot\log_5 4\cdot\frac{1}{\log_5 6}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 7}\cdot\frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.

3. 8. **4.** а) $-\frac{1}{2}$, б) 18, в) $\sqrt{5}$. 5. $\log_b a=\log_{\left(\frac{1}{b}\right)^{-1}} a=-\log_{\frac{1}{b}} a$.

3.6.

1. $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **2.** $x_1=4,\ x_2=1$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1=7,\ x_2=\frac{16}{3}$. **5.** $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. **6.** $x=16$. **7.** 4.

3.7.

1. а) $x=y$, б) $x>y$, в) $x<y$. **4.** а) $a^{\frac{4}{3}}$, б) $a^{\frac{2}{3}}$. **5.** $x=8$. **6.** $x=2$. **7.** ѓ. **8.** $x=1$. **9.** $x=1$. **10.** 4. **11.** а) $x=4$, б) $x=\frac{1}{81}$, в) $x=\frac{1}{10}$, г) $x=\frac{1}{2}$, д) $\sqrt[5]{100}$, ѓ) $x=2$.

12. а) $\log 2+\log x+\log y$, б) $\log 3+2\log x+3\log y$, в) $2\log x+5\log y+\frac{1}{2}\log z$

г) $\sqrt{b}\log a+3\log c$, д) $\log 6+\log x+\frac{2}{3}\log y$, ѓ) $\frac{1}{2}(\log 2+\log x)+\frac{1}{4}(3\log x+\frac{1}{2}\log y)$,

е) $\frac{1}{2}(\log x+\frac{3}{4}\log y)$. **13.** а) $x=6$, б) $x=10$, в) $x=21$, г) $x=1125$. **14.** а) $x\approx 6{,}73$; б) $x\approx 0{,}00884$; в) $x\approx 76{,}296$. **15.** а) $2\log_4 5$, б) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}} 3}$, в) $-\log_{\frac{1}{10}} 5$. **16.** а) $\frac{1}{35}$, б) $\log_2\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **17.** а) 8 б) 1. **18.** $x=1$. **19.** $x=5$. **20.** $x=25$. **21.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. **22.** $x=7$.

23. $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=10$.

4.1.

1.

Степени	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Радијани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $tg\beta=\frac{12}{5}$, $ctg\beta=\frac{5}{12}$. **3.** $\sin\beta\approx 0{,}87$, $\cos\beta\approx 0{,}49$, , $tg\beta\approx 1{,}77$, $ctg\beta\approx 0{,}56$. **4.** $\sin\alpha=0{,}8$, , $\cos\alpha=0{,}6$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$. **5.** $\sin\alpha\approx 0{,}78$, $\cos\alpha\approx 0{,}62$, $tg\alpha\approx 1{,}26$, $ctg\alpha\approx 0{,}79$.

4.2.

1. а) 0,54, б) 0,98, в) 0,84, г) 0,54. **2.** а) 60^0, б) 70^0, в) 15^0, г) 40^0. **3.** а) 1, б) 1, в) 1. **4.** а) 3, б) $-\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$, в) 1. **5.** а) 45^0, б) 30^0, в) 45^0, г) 60^0, д) 30^0.

4.3.

1. а) $\sin 48^0\approx 0{,}74$, $\cos 48^0\approx 0{,}67$, $tg48^0\approx 1{,}11$, $ctg48^0\approx 0{,}9$, б) $\sin 23^0 12' 23''\approx 0{,}39$, $\cos 23^0 12' 23''\approx 0{,}92$, $tg23^0 12' 23''\approx 0{,}43$, $ctg23^0 12' 23''\approx 2{,}33$, в) $\sin 16{,}19^0\approx 0{,}28$, $\cos 16{,}19^0\approx 0{,}96$, $tg16{,}19^0\approx 0{,}29$, $ctg16{,}19^0\approx 3{,}44$, **2.** а) $\sin\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}78$, $\cos\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}62$, $tg\frac{2\pi}{7}\approx 1{,}25$, $ctg\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}8$, б) $\sin\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $\cos\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $tg\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}93$, $ctg\frac{5\pi}{21}\approx 1{,}08$.
3. а) $35^0 42' 20''$, б) $44^0 25' 23''$, в) $67^0 32' 3''$, г) $26^0 23' 16''$, д) $44^0 24' 55''$, ѓ) $72^0 53' 50''$.
4. а) 0,01, б) $-0{,}2$. **5.** а) $25^0 55' 39''$, б) $17^0 26' 14''$, в) $46^0 12' 59''$.

4.4.

1. а) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $ctg\alpha=\frac{12}{5}$, б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha=\sqrt{15}$, $ctg\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$, в) $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $ctg\alpha=\frac{5}{4}$, г) $\sin\alpha\approx 0{,}92$, $\cos\alpha\approx 0{,}39$, $tg\alpha\approx 2{,}44$, **2.** а) $\sin^2\alpha$, б) $-\cos^2\alpha$, в) 1. **6.** $\frac{55}{54}$. **7.** $6\sqrt{2}$.

4.5.

1. а) $\beta=53{,}8^0$, $a=40{,}1cm$, $b=54{,}9cm$, б) $\beta=74{,}2^0$, $a=11{,}7cm$, $b=3{,}3cm$, в) $\beta=24{,}6^0$, $b=5{,}14cm$, $c=5{,}65cm$. **2.** а) $\beta=8^0$, $a=1750{,}4cm$, $c=1767{,}6cm$, б) $\alpha=41^0\,30'$, $a=66{,}1cm$, $c=99{,}7cm$, в) $\beta=66^0$, $b=11{,}79cm$, $c=5{,}25cm$. **3.** а) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=42^0\,2'\,55''$, $b=224{,}48cm$, б) $\alpha=61^0\,55'\,39''$, $\beta=28^0\,4'\,21''$, $c=59{,}5cm$, в) $\alpha=21^0\,19'\,47''$, $\beta=68^0\,40'\,13''$, $c=338{,}16cm$. **4.** $45^0\,14'\,23''$. **5.** $36^0\,52'\,12''$. **6.** Од местото B авионот е на растојание $4182{,}78m$, а растојанието меѓу A и B е $1223m$.

4.6.

1. а) $34^0\,24'\,36''$, б) $18^0\,16'\,12''$, в) $23^0\,40'\,12''$. **2.** а) $36{,}43^0$, б) $45{,}19^0$, в) $73{,}87^0$. **3.** а) $0{,}44rad$, б) $1{,}49rad$. **4.** а) 105^0, б) $72^0\,45'\,56''$. **5.** а) 0, б) 2, в) $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq 0$, **6.** а) 65^0, б) $47^0\,10'$, в) 30^0, г) 40^0. **7.** а) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, б) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, в) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $ctg\alpha=\frac{5}{3}$, г) $\sin\alpha=\frac{25}{\sqrt{674}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{674}}$, $tg\alpha=\frac{25}{7}$. **8.** а) 7, б) -1. **9.** а) $\beta=53^0\,58'$, $a\approx 40$, $b\approx 55$, б) $\alpha=25^0\,40'$, $b\approx 936{,}43$, $c\approx 1038{,}94$, в) $\alpha=4^0\,50'$, $a\approx 0{,}05$, $c\approx 0{,}622$, г) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=44^0\,2'\,55''$, $b\approx 222{,}48$, д) $\alpha=84^0\,44'\,6''$, $\beta=5^0\,15'\,54''$, $a\approx 42{,}32$. **10.** $b=a\pm 2c\cdot\cos\alpha$, $h=c\sin\alpha$. **11.** $2\,410m$.

5.1.

1. а) II-квадрант, б) I-квадрант, в) IV-квадрант, г) III-квадрант, д) $x-$оската, ѓ) $y-$оската, е) $x-$оската, ж) $y-$оската. **2.** $M(1,0)$, $N(-2,0)$, $P(5,0)$, $Q(-3,0)$. **3.** $M(0,3)$, $N(0,4)$, $P(0,-2)$, $Q(0,-1)$. **4.** $m_x=4$, $m_y=2$.

5.2.

1. а) $d=\sqrt{82}$, б) $d=4$, в) $d=3\sqrt{5}$, г) $d=3\sqrt{5}$. **3.** $y=11$ или $y=-1$. **4.** $C(21,18)$. **5.** 13.

5.3.

1. $S_{AB}\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1,-\frac{7}{2}\right)$. **2.** 5. **3.** $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$. **4.** а) $\left(5,\frac{9}{5}\right)$, б) $\left(6,\frac{11}{5}\right)$, в) $(-7,-3)$, г) $(18,7)$. **5.** $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$.

5.4.

1. $P=21$. **2.** Не. **3.** Да. **4.** $P=15$. **5.** $P=\frac{55}{2}$. **6.** $P_{APB}=\frac{15}{2}$, $P_{PBC}=\frac{9}{4}$.

5.5.

1. Само P е од правата. **2.** а) $y=x$, б) $y=-x$, в) $y=0$. **3.** а) $k=2$, $m=-3$, б) $k=-1$, $m=3$, в) $k=0$, $m=-2$, г) $k=\sqrt{3}$, $m=0$. **4.** $y=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$. **5.** $y=-x-1$. **6.** $k=-\frac{6}{5}$, $m=\frac{7}{5}$. **7.** $y=-5x+2$.

5.6.

1. а) $2x-3y-3=0$ б) $y+4=0$ в) $x-3=0$. **2.** а) $k=2$, $m=3$, б) $k=\frac{5}{2}$, $m=\frac{3}{2}$, в) $k=-\frac{3}{8}$, $m=-\frac{16}{3}$. **3.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $m=3$. **5.** Да.

5.7.

1. а) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$, 4 единици на $x-$оската, 6 единици на $y-$оската, б) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, 1 единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската, в) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1$ $\frac{1}{2}$ единици на $x-$оската, 1 единици на $y-$оската. **2.** $k=\frac{6}{85}$. **3.** $k=\pm\frac{5}{12}$. **4.** 18 квадратни единици. **5.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$.

5.8.

1. а) $y+3=k(x-2)$, б) $y-4=k(x+1)$. **2.** $3x+y+5=0$. **3.** $x+y+3=0$. **4.** а) $k=-\frac{7}{5}$, б) $k=-5$, в) $k=0$. **5.** $7x+5y-13=0$. **6.** Не. **7.** $d=\frac{7}{5}$, не. **8.** $d=\frac{2}{3}$. **9.** $d_M=\frac{10}{\sqrt{5}}$ и $d_N=\frac{8}{\sqrt{5}}$. **10.** $x+y=7\pm5\sqrt{2}$.

5.9.

1. а) се сечат во точката $(1,2)$, б) се паралелни, в) се совпаѓаат. **2.** а) $(5,0)$ и $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, б) $(-6,0)$ и $(0,4)$. **3.** $5x-6y+28=0$. **4.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **5.** $2x+y-4=0$. **6.** $5x+3y-60=0$.

5.10.

1. $4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13})$. **2.** а) $M(7,1)$, б) $M(7,1)$. **3.** $\lambda=\frac{1}{2}$. **4.** $P=14$. **6.** $7x+10y+29=0$. **8.** $D(1,-5)$. **11.** а) $d=\frac{7}{5}$, б) $d=1$. **12.** $x-3=0$, $x-3y-7=0$, $x+3y-13=0$. **13.** а) $T(-4,0)$, б) Н(4,4). **15.** $M(-3,8)$. **16.** $P=49$. **17.** $4x+3y-120$, $48x+9y+72=0$. **18.** $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=1$ и $k_1=-\frac{5}{3}$.

Користена литература

1. Arnold Glen, Essentials of Corporate Financial Management, Harlow, UK, 2007

2. Berk,J and De Marzo,P, Corporate Finance, Harlow, UK, 2009

3. Fabozzi J. Frank, Franco Moodigliani, Michael G. Ferri, Foundation of financial markets and institutions, 2nd ed., 2000

4. Gitman, Principles of Managerial Finance, Addison - Wesley, 2007

5. Gitman, Principles of Managerial Finance, 12th edn, Pearson, 2009

6. Patel, A. B.,Trading Online. London: FT Pitman, 1999

7. Sam Y. Cross, The Foreign Exchage Market, Federeal Reserve Bank of New York, 1998

8. S. G. Kellison, The theory of interest, Georgia State University, Irwin, 1991

9. Teresa Bradley, Paul Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

10. Б. Попов, Математика за IV клас за стручните училишта, Просветно дело, Скопје, 1977

11. Г. Тренчевски, Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2001

12. Д. Димовски, Б. Крстеска, Л. Кондинска, С. Здравеска, Математика за втора година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2002

13. Д. Јанев, З. Коловски, Г. Билбиловска, М. Стојановски, Математика за економисти, збирка задачи, Савремена администрација, Београд, 1991

14. Е. Стипаниќ, Математика за III и IV разред гимназије друштвено - језичног смера, Завод за издавање уџбеника Народне Републике Србије, Београд, 1962

15. З. Ивановски, А. Станковска, Девизна политика, Европски универзитет, 2007

16. М. Ивовиќ, Финансијска математика, Економски факултет, Београд, 2003

17. Н. Давидовиќ, Основи на математиката, Култура, Скопје, 1975

Автори

Костадин Тренчевски
Анета Гацовска
Надица Ивановска

Лектура

Маја Цветковска

Компјутерска обработка

Авторите